9.-luokkalaisten avaruusgeometrian tehtävissä tekemät virheet ja opettajaopiskelijoiden ennakkokäsitykset niistä

Helsingin yliopisto
Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Matematiikan aineenopettajan opinnot
Pro gradu –tutkielma
Helmikuu 2019
Anne Kivistö

Ohjaaja: Juha Oikkonen

Tiedekunta – Fakultet – Faculty	Koulutusohjelma – Utbildningsprogram – Degree programme
Matemaattis-luonnontieteellinen	Matematiikan aineenopettaja

Tekijä – Författare – Author

Anne Kivistö

Työn nimi – Arbetets titel – Title

9.-luokkalaisten avaruusgeometrian tehtävissä tekemät virheet ja opettajaopiskelijoiden ennakkokäsitykset niistä

Työn laji – Arbetets art – Level	Aika – Datum – Month and year	Sivumäärä – Sidoantal – Number of pages
Pro gradu -tutkielma	Helmikuu 2019	48 sivua + 3 liitesivua

Tiivistelmä – Referat – Abstract

Kansallisten ja kansainvälisten tutkimusten mukaan geometria on heikoiten osattu matematiikan osa-alue, ja se sisältää paljon eri käsitteitä. Matemaattisen käsitetiedon rakentumiseen on olemassa erilaisia malleja ja tunnetuin näistä on van Hielen-teoria. Käsitetiedon syvyys voidaan jaotella eri tasoille ja eri tyyppiset tehtävät puolestaan vaativat eri tasoista käsitetietoa. Käsitetiedon tasoon voidaan pureutua virheiden tutkimuksen avulla. Mahdollisten virheellisten mentaalimallien ehkäisemiseksi opettajan ennakkokäsityksillä on suuri rooli.

Tutkimuksen tavoitteena on tutkia ja analysoida millaisia virheitä perusopetuksen päättövaiheen oppilaat tekevät avaruusgeometrian tehtävissä ja liittyykö avaruusgeometrian osaaminen matematiikan osaamiseen yleisesti. Lisäksi tutkimuksessa tarkastellaan opettajaopiskelijoiden ennakkokäsityksiä 9.-luokkalaisten tekemistä virheistä avaruusgeometrian tehtävissä.

Tämän tutkimuksen aineisto koostuu keväällä 2012 Opetushallituksen keräämästä perusopetuksen päättövaiheen matematiikan oppimistulosarvioinnin sensoriaineistosta, joka kattaa 683:n oppilaan vastaukset. Tätä aineistoa täydentää 21:ltä yliopisto-opiskelijalta syksyllä 2017 kerätty yksilö- ja ryhmäaineisto. Opiskelija-aineiston yksilöosuuden muodostaa kaksi avaruusgeometrian tehtävää, joita on testattu myös oppilailta. Yliopisto-opiskelijoiden ryhmäaineisto puolestaan sisältää pohdintoja tutkittavana olevien avaruusgeometrian tehtävien vastausten mahdollisista virheistä. Koko aineisto analysoitiin tilastollisin menetelmin sekä laadullisin menetelmin mm. sisällönanalyysillä.

Tutkimuksessa saatujen tulosten mukaan avaruusgeometrian tehtävien osaaminen on yhteydessä lukuihin ja laskutoimituksiin liittyvien tehtävien osaamiseen. Avaruusgeometrian tehtävissä esiintyneet virheet olivat pääsääntöisesti matemaattiseen käsitetietoon liittyviä virheitä, ja huolimattomuus- tai laskuvirheitä esiintyi aineistossa vähän. Opettajaopiskelijoiden ennakkokäsitykset oppilaiden tekemistä virheistä noudattivat pääsääntöisesti hyvin tutkimuksessa esiin tulleita virheitä. Opettajaopiskelijat osasivat myös jaotella mahdollisia virheitä eri tasoille käsitetiedon syvyyden mukaan, joka kertoo opettajaopiskelijoiden ymmärryksestä matemaattisen käsitetiedon oppimisesta ja opettamisesta.

Avainsanat – Nyckelord – Keywords

avaruusgeometria, konseptuaalinen tieto, proseduaalinen tieto, van Hielen teoria

Säilytyspaikka – Förvaringställe – Where deposited

Kumpulan kampuskirjasto

Muita tietoja – Övriga uppgifter – Additional information

Sisällysluettelo

1 Johdanto

Matematiikan opetus ja oppiminen ovat murroksessa ja uusia opetusmetodeja kehitetään kiivaasti. Jopa uudistettu Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2014 kannustaa matematiikan toiminnalliseen ja useita opetusmenetelmiä yhdistelevään opettamiseen (POPS 2014). Toiminnallisuuteen, tieto- ja viestintäteknologian käyttämiseen sekä tutkimiseen kannustavan matematiikan opettamisen voi ajatella sopivan erityisen hyvin geometrian opettamiseen. Uusien opetusmenetelmien käyttämiseen kannustaminen erityisesti geometrian opettamisessa onkin positiivista, sillä geometria matematiikan osa-alueena koetaan yleisesti haastavaksi. Tätä väitettä tukevat sekä kansalliset että kansainväliset matematiikan osaamisen ja oppimistulosten arvioinnit. Viimeisimmissä kansallisissa matematiikan oppimistulosten arvioinneissa peruskoulun päättövaiheessa geometria on ollut heikoiten osattu matematiikan osa-alue (Hirvonen 2012, Julin & Rautapuro 2016).

Oppimistulosarviointien avulla kuitenkaan harvoin päästään siihen, mistä oppijan geometrian osaaminen koostuu ja mitä hänen tulisi vielä oppia. Oppimistulosarvioinneissa arvioidaan tavallisesti sitä, kuinka monta oikeaa vastausta oppija on saanut ratkaistua tai kuinka monta pistettä kustakin arvioitavasta tehtävästä oppijalle on kertynyt. Pelkkien keskiarvojen tai maanlaajuisten osaamisten trendien tarkastelun sijaan hedelmällisempää yhden oppijan kannalta olisikin tarkastella hänen tekemiään virheitä ja näin selvittää, onko arviointiin osallistuvien oppijoiden osaamisprofiileissa ja erityisesti heidän tekemissään virheissä yhtäläisyyksiä.

Samankaltaisten virheiden esiintyminen kertoo paljon sekä käytettävästä opetussuunnitelmasta että sitä noudattavista ja toteuttavista opettajista. Opetussuunnitelmien uudistaminen perustuu aina luotettavaan kansalliseen ja kansainväliseen arviointitietoon. Kansallista kattavaa aineistoa tutkimalla päästään kuitenkin näkemään käytössä olevan opetussuunnitelman taakse: opetussuunnitelmaa toteuttavien opettajien opetukseen. Samankaltaisten virheiden esiintyminen eri opettajien oppilaiden vastauksissa kertoo siitä, että opettajat käyttävät samankaltaisia virheellisiä käsityksiä tukevia opetusmenetelmiä. Kuten Kansanen teoksessaan (2004) esittääkin, opettajat voivat oppia toisten opettajien tekemistä virheitä ja näin ollen mahdollistaa oppilailleen parhaan mahdollisen tavan oppia. Erityisen tärkeää mahdollisten opetusmenetelmien sudenkuoppien ja oppilaille haasteellisten käsitteiden ennakoiminen on nuorille opettajille. Opettajaopiskelijat nimittäin kokevat, etteivät heidän suorittamansa opinnot tarjoa riittävästi tukea erilaisiin oppimisen haasteisiin (Koponen). Erityisesti aineenopettajien koulutuksessa painotetaan vahvaa aineenhallintaa, joka näkyy siinä, että aloittelevien opettajien geometrinen käsitteellinen tieto on parempaa kuin aiheeseen liittyvä menetelmätieto (Habila et al.).

Tämän tutkimuksen tarkoituksena on selvittää millaisia virheitä oppilaat tekevät avaruusgeometrian tehtävissä ja tutkia lisäksi sitä, miten tulevat opettajat osaavat ennakoida oppilaiden virheellisiä päätelmiä.

Ensin tässä tutkimuksessa esitellään aiheelle teoreettinen viitekehys, jonka muodostaa geometrian opettamiseen ja oppimiseen liittyvä tutkimuskatsaus. Lisäksi teoreettisessa viitekehyksessä esitellään matemaattisten virheiden analysoinnin historiaa ja joitain tutkimustuloksia, joita tutkija on käyttänyt oman virheanalysointi-mallinsa muotoilun apuna. Tutkimuksessa käytettävä aineisto on osa Opetushallituksen keräämää matematiikan osaamisen pitkittäistutkimusta ja käytetty aineisto on kerätty peruskoulun päättäviltä oppilailta keväällä 2012. Aineisto ja sen analysointimenetelmät kuvataan tarkemmin luvussa 4, ja tutkimuksen tulokset puolestaan esitellään luvussa 5 käyttäen apuna taulukoita ja kaavioita. Tämän tutkimuksen luotettavuutta tarkastellaan luvussa 6. Luvussa 7 puolestaan kootaan yhteen tutkimuksesta nousseita tuloksia ja esitellään jatkotutkimusaiheita.

2 Teoreettinen tausta

Tämän tutkimuksen teoreettinen tausta muodostuu geometrian opetuksesta peruskoulussa, geometrisen käsitetiedon rakentumisesta sekä katsauksesta erilaisten virheluokittelujärjestelmien historiaan.

2.1 Peruskoulun geometrian opetus ja osaamisen arviointi

Peruskoulun matematiikan opetus perustuu Opetushallituksen tuottamaan Opetussuunnitelman perusteet-asiakirjaan, jota uudistetaan noin kymmenen vuoden välein. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa 2004 (POPS2004) määritellään tuntijako, matematiikan keskeiset sisällöt sekä päättöarvioinnin kriteerit arvosanalle 8. POPS 2004:ssa määritellään perusopetuksen tuntijako seuraavasti: matematiikkaa opetetaan peruskoulun aikana yhteensä 32 vuosiviikkotuntia (1 vuosiviikkotunti = 38 oppituntia), joista luokilla 6–9 niistä on 14 vuosiviikkotuntia. Matematiikan keskeiset sisällöt vuosiluokille 6–9 puolestaan ovat ajattelun taidot ja menetelmät, luvut ja laskutoimitukset, algebra, funktiot, geometria sekä todennäköisyys ja tilastot. Tämän perusteella voidaan karkeasti arvioida, että geometriaa opetetaan neljän vuosiluokan aikana yhteensä kolme vuosiviikkotuntia.

POPS 2004-asiakirjassa mainitut geometrian keskeiset sisällöt ovat muun muassa tasokuvioiden ja kappaleiden ominaisuudet, pinta-alan ja tilavuuden laskeminen, Pythagoraan lause sekä trigonometria. Monet keskeisistä sisällöistä ovat yleistettävissä sekä taso- että avaruusgeometriaan. Lisäksi geometristen ongelmien ratkaisemiseksi tarvitaan aritmetiikan ja algebran taitoja.

Geometristen sisältöjen osaamisen tavoitteet on konkretisoitu päättöarvioinnin kriteereissä arvosanalle 8 ja nämä geometrian kohdalla ovat:

• tunnistaa eri geometriset muodot ja tuntee niiden ominaisuudet

• soveltaa oppimaansa piirin, pinta-alan ja tilavuuden laskutapoja

• käyttää harppia ja viivoitinta yksinkertaisten geometristen konstruktioiden tekemiseen

• löytää yhdenmuotoisia ja yhteneviä sekä symmetrisiä kuvioita ja pystyy soveltamaan tätä taitoa kolmioiden ja nelikulmioiden ominaisuuksien tutkimisessa

• soveltaa kahden kulman välisiä yhteyksiä yksinkertaisissa tilanteissa

• käyttää Pythagoraan lausetta ja trigonometriaa suorakulmaisen kolmion osien ratkaisemiseen

• suorittaa mittauksia ja niihin liittyviä laskelmia sekä muuntaa tavanomaisimpia mittayksiköitä.

(Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2004)

Tässä tutkimuksessa käytetty tehtäväaineisto pohjautuu siis keskeisten sisältöjen pohjalta muotoutuneille tavoitteille ja niiden tulkinnalle.

Osaamisen tason arviointiin puolestaan on olemassa erilaisia malleja, joista tunnetuimpia ovat Bloomin taksonomia ja Bloomin taksonomian uudistettu versio, Krathwohl-Anderssonin taksonomia (Kuva 1.). Krathwohl-Anderssonin taksonomia on kaksiulotteinen osaamisen tason arvioinnin väline, jonka avulla voidaan arvioida yksittäisen tehtävän vaatimaa osaamisen tasoa sekä vaadittavan tiedon että kognitiivisen osaamisen ulottuvuuksissa (Krathwohl).

	Ajattelun taso (kognitiivinen prosessi)					
Tiedon luonne	Muistaa	Ymmärtää	Soveltaa	Analysoida	Arvioida	Luoda
A. Faktatieto						
B.Käsitetieto						
C.Menetelmätieto						
D.Metakognitiivinen tieto						

Kuva 1. Krathwohl-Anderssonin taksonomian visuaalinen esitys.

Edellä esitetty malli eroaa Bloomin taksonomiasta siten, että mukaan on otettu myös tiedon luonteen taso. Tässä mallissa tieto on jaoteltu neljään eri luokkaan: faktatietoon, käsitetietoon, menetelmätietoon ja metakognitiiviseen tietoon. Mallista voidaan kuitenkin jättää huomioimatta tarvittaessa tiedon eri tasoja. Krathwohlin ja Anderssonin taksonomiaa voidaan käyttää apuna erityisesti osaamisen arvioinnissa ja kehittymisessä. Matematiikan oppiminen etenee kumulatiivisesti, joten myös ajattelun tason tulee edetä ajan myötä. Taksonomiaa tulee kuitenkin peilata aina käytettävissä olevaan opetussuunnitelmaan, sillä kaikilla sisältöalueilla ei ole tarpeen saavuttaa taksonomian korkeimpia ajattelun tasoja.

2.2 Konseptuaalinen ja proseduaalinen tieto

Matemaattinen tieto jaetaan perinteisesti kahteen luokkaan: konseptuaaliseen ja proseduaaliseen tietoon. Haapasalo kirjoittaa artikkelissaan (2004) konseptuaalisen ja proseduaalisen tiedon eroista ja näiden eri tietolajien vaikutuksesta opettamiseen ja oppimiseen. Haapasalo määrittelee konseptuaalisen eli käsitteellisen tiedon tiedoksi siitä *miksi.* Konseptuaaliseen tietoon liittyy voimakkaasti asioiden välisistä riippuvuuksista, joka käy hyvin ilmi seuraavasta Haapasalon artikkelin määritelmästä:

> "Konseptuaalinen tieto (…) on semanttinen verkko, jonka solmujen ja linkkien tulkitsemiseen yksilö kykenee osallistumaan, tiedostaen ja ymmärtäen toimintansa perusteet ja logiikan."

Konseptuaalinen tieto on siis tietoa siitä, miksi matemaattiset käsitteet liittyvät toisiinsa, miten ne liittyvät toisiinsa ja miten tätä tietoa voidaan hyödyntää.

Proseduraalinen tieto puolestaan määritellään tiedoksi siitä, *miten.* Proseduaalinen tieto onkin tietoa siitä, miten matemaattisia symboleita, sääntöjä ja prosesseja käytetään. Haapasalo määritteleekin proseduaalisen tiedon seuraavasti:

> “Proseduaalinen tieto (…) tarkoittaa dynaamista ja tarkoituksenmukaista sääntöjen, menetelmien tai algoritmien (toimintakaavojen) suorittamista käyttäen hyväksi tiettyjä esitystapoja. Tämä edellyttää tavallisesti näiden esitystapojen pohjana olevien tietojärjestelmän syntaksin ja esitysmuotojen ymmärtämistä, mutta ei sen sijaan välttämättä näiden ominaisuuksien tietoista ajattelemista, ainakaan mikäli suoritus on automatisoitunut. “

Haapasalon mukaan nämä kaksi matemaattisen tiedon lajia ovat yhteydessä toisiinsa, eikä esimerkiksi tehtäviä voida jakaa selkeästi vain toista tietolajia mittaavaan tehtävään. Kuitenkin monet opettajat tunnistavat oppijan ongelman siitä, että nämä kaksi tiedon lajia eivät ole yhteydessä toisiinsa: oppija saattaa osata ratkaista ongelman osaamatta kertoa, miksi valitsi kyseisen ratkaisutavan tai oppija osaa kertoa millaisia käsitteitä ratkaisemiseen vaaditaan, mutta ratkaisutavan symbolinen esittäminen ei onnistu. Tämä kertoo siitä, että näiden kahden tietolajin yhdistäminen ei ole onnistunut. Haapasalo esittelee kaksi erilaista konseptuaalisen ja proseduaalisen tiedon linkittämisen tapaa: kehityksellisen ja koulutuksellisen lähestymistavan. Kehityksellisellä lähestymistavalla tarkoitetaan sitä, että tiedonmuodostus perustuu proseduaaliseen tiedon päälle: toisin sanoen ensin opetellaan tekemään ja vasta sen jälkeen pohditaan miksi. Koulutuksellinen lähestymistapa puolestaan pohjautuu käsitteelliseen tietoon, jonka avulla opetellaan, miten tämä tieto esitetään ja yhdistetään. Haapasalo toteaakin opettajalla olevan suuren roolin tietojen yhdistämisessä ja näiden eri lähestymistapojen tarkoituksenmukaisen vaihtelun tuovan parhaan tuloksen oppijan kannalta. Tutkimusten mukaan (Rittle-Johnson & Alibali) kumpikin lähestymistapa parantaa oppimistuloksia, joskin konseptuaalista tietoa painottava opetustapa on hieman tehokkaampi oppimisen kannalta.

2.2.1 Geometrinen konseptuaalinen tieto ja sen oppiminen: van Hielen teoria

Geometrisella konseptuaalisella tiedolla tarkoitetaan tietoa siitä, miten oppija yhdistää käsitteitä ja millaisena kukin käsite hänelle ilmenee, toisin sanoen millaisena oppija hahmottaa esimerkiksi kolmiot. Toisaalta esimerkiksi kolmion piirtämiseen liittyy sekä konseptuaalista ja proseduaalista tietoa, mutta proseduaalisen tiedon merkitys vähenee sitä mukaa, mitä tutummaksi kolmioiden piirtäminen tulee. Geometrisen konseptuaalisen tiedon oppimisen kuvaamiseen ja tarkasteltuun käytetään tyypillisesti van Hielen teoriaa. Teorian ovat kehittäneet Pierre van Hiele ja Dina van Hiele-Geldof 1950-luvun lopussa. Tässä teoriassa oppilaan geometrisen käsitetiedon kehittyminen tapahtuu viiden tason kautta siten, että tasolta toiselle siirtyminen edellyttää aikaisemman tason kykyjen osaamista. Seuraavaksi esitellään nämä viisi van Hielen tasoa kuvauksineen:

1. taso: *Tunnistaminen*
   Tunnistamisen tasolla oppilas osaa tunnistaa ja nimetä yleisimmät geometriset kuviot, kuten kolmion, neliön ja ympyrän. Tunnistaminen ja nimeäminen perustuu visuaalisiin ominaisuuksiin, eikä oppilas osaa vielä perustella luokitteluaan kuvion ominaisuuksien avulla.

2. taso: *Analysointi*
   Analysoinnin tasolla oppilas kiinnittää huomiota kuvioiden ominaisuuksiin ja osaa vertailla keskenään erilaisia ominaisuuksia kantavia kuviota toisiinsa. Kuitenkin eri ominaisuuksien väliset yhteydet eivät ole vielä loogisia ja oppilaalla voi olla vaikeuksia selittää, miten suorakulmio ja suunnikas liittyvät toisiinsa.
3. taso: *Järjestäminen*
   Järjestämisen tasolla oppilas osaa muodostaa erilaisia luokittelujärjestelmiä ja hierarkioita kuvioiden ominaisuuksien perusteella. Oppilas pystyy muodostamaan omia määritelmiä ja päätelmiä määritelmien perusteella. Kuitenkin eri aksioomien ja määritelmien käyttäminen ei vielä onnistu.
4. taso: *Päättely*
   Päättelyn tasolla oppilas osaa muodostaa itsenäisesti todistuksia määritelmiin ja päättelyyn pohjautuen. Oppilas osaa erottaa toisistaan ongelmanratkaisutehtävässä annetut tiedot ja todistamiseen tarvittavat tiedot toisistaan, ja hän pystyy selittämään kuvioiden välisiä yhteyksiä.
5. taso: *Aksiomisysteemin ymmärtäminen*
   Aksiomisysteemin ymmärtämisen tasolla oppilas pystyy vertailemaan eri geometrioita keskenään, sekä pystyy käyttämään kuvailunsa apuna erilaisia matemaattisia malleja.

Perusopetuksen avulla oppilaan ei ole tarkoitus saavuttaa van Hielen viidettä tasoa eikä myöskään neljännen tason saavuttaminen ole välttämätöntä. van Hielen teoriaa voidaan laajentaa ottamalla mukaan myös 0. taso, joka tarkoittaa, että oppilas ei ole saavuttanut vielä 1. tasoa.

van Hielen teorian mukaan geometrian oppiminen ja opettaminen tulee tapahtua sillä tasolla, jolla oppilas kulloinkin on. Tämä tarkoittaa sitä, että opettajan tulee pystyä määrittämään jokaisen opettamansa oppilaan taso. Myös opetuksessa käytettävän matemaattisen kielen tulee käsitteellisesti olla oppilaan omalla tasolla. Teorian mukaan tasot eivät myöskään ole yhteydessä oppilaan ikään, joten luokkahuoneessa voi olla oppilaita kuudelta eri van Hielen tasolta. Tasolta toiselle nousemisen tukemiseen on kehitetty viidestä vaiheesta koostuva opetusmenetelmä, joka perustuu oppilaan oman toiminnan vaiheittaiseen lisäämiseen ja ongelmalähtöisyyteen. Opetusmenetelmän vaiheet ovat:

1. *Tutkiva kysely*, jossa kartoitetaan oppilaan osaamisen taso ja esitellään aihepiiri alustavasti.
2. *Suunnattu orientoituminen*, jossa oppilaat tekevät aihepiiriin liittyviä yksinkertaisia tehtäviä, joiden tarkoituksena on tutustuttaa aihepiiriin.
3. *Tarkentaminen*, jossa oppilaiden käsitetietoa tarkennetaan ja käsitetieto alkaa muodostua.
4. *Vapaa orientoituminen*, jossa oppilaat suorittavat monimutkaisempia ongelmanratkaisutehtäviä sekä käsitteiden yhteydet alkavat muodostua ja hierarkioita syntyä.

5. *Kokoaminen*, jossa käsiteltävästä aiheesta muodostetaan kokonaiskuva.

Erityisen tärkeäksi tässä opetusmenetelmässä nousee ensimmäisen vaiheen onnistuminen, sillä teorian mukaan liian korkealla tasolla tapahtuva opettaminen ei mahdollista tasolta toiselle siirtymistä. Tämän opetusmenetelmän vaiheet löytyvät useista peruskoulun matematiikan oppikirjoista hieman muunneltuina. (mukaillen Korkatti 2016, Silfverberg 1999).

2.3 Virheiden luokittelun historiaa ja tulevaisuutta matematiikan oppimisen saralla

Matematiikassa on käytetty virheiden luokittelua pedagogisen tutkimuksen pohjana jo 1920-luvulta lähtien (Radatz). Virheiden luokittelulla ja analysoinnilla voidaan saada arvokasta tietoa virheen syntytavasta. Tämä taas antaa vihjeitä siitä, miten matematiikkaa kannattaa opettaa ja millaiset opetustavat altistavat tietyn tyyppisille virheille. Virheiden tutkimisesta saadaan myös tietoa matemaattisista oppimisvaikeuksista ja niiden merkityksestä matematiikan oppimiselle. Näihin seikkoihin voidaan kiinnittää huomiota jo opetussuunnitelmaa laadittaessa sekä opettajankoulutuksessa.

Viime vuosina virheiden analysoinnille ja luokittelulle on tullut uusia sovelluskohteita, sillä myös matematiikan opettaminen ja oppiminen ovat siirtymässä sähköisiin oppimisympäristöihin. Sähköisten oppimisympäristöjen heikkona puolena on edelleenkin palautteen puute. Vaikka oppija voisikin palauttaa matematiikan tehtävän sähköisesti, on välittömän palautteen saaminen hankalaa. Palautteen pohjalta virheen korjaaminen on todettu hyväksi keinoksi virheellisten käsitysten oikomiseen (Schnepper & McCoy, 2013). Palautteen tulee kuitenkin sopia tehtyyn virheeseen ja antaa vain tarvittava tieto ratkaisun oikeaksi saattamiseksi.

Matemaattista virheluokittelua on yritetty kehittää ja automatisoida sähköisten oppimisympäristöjen työkalun pohjaksi. Jotta sähköisiä oppimisympäristöjä voidaan käyttää hyödyksi, täytyy ohjelman tunnistaa tehtyjä virheitä ja pystyä antamaan kullekin virhetyypille sille ominainen palaute. Virheiden luokittelussa täytyy tällöin käyttää tyypillisille väärille vastauksille räätälöityjä automaattisia palautteita. Majander (2009) on käyttänyt tutkimuksessaan mekaniikan tehtäviä varten laadittua virheluokittelujärjestelmää, jonka avulla opiskelijoiden virheellisiin vastauksiin on laadittu automaattinen viesti, joka raportoi tehdyn virheen. Tutkimuksen mukaan kuitenkaan palaute ei kuitenkaan ollut tarpeeksi johdattelevaa vaan virheen mukaan annettu palaute kertoi liian suoraan tehtävätyypin oikean ratkaisutavan. Tiitu (2016) puolestaan on tutkinut sähköiseen oppimisympäristöön liittyvän virheanalyysin luotettavuutta lääkelaskennan opettamisen yhteydessä. Myös Tiitun tutkimuksessa tultiin siihen tulokseen, ettei automaattinen virheiden luokittelu tuota tarvittavaa tietoa oppijan osaamisen tasosta eikä järjestelmän käyttäminen tee tarpeellista eroa käsitteellisten ja muiden virheiden välillä.

Matematiikassa virheiden analysoiminen ja virheellisten käsitysten syntytavan selvittäminen on erityisen tärkeää matematiikan oppimisen kumulatiivisuuden vuoksi. Matematiikkaa on tapana opettaa spiraalimaisesti siten, että vanhaa tietoa laajennetaan uudella tiedolla. Esimerkkinä voidaan tutkia yhteenlaskun opettamistapaa. Yhteenlaskun harjoittelu aloitetaan jo varhaiskasvatuksessa lukumäärillä, ja ensimmäisellä vuosiluokalla yhteenlaskun käsitteeseen liitetään pienet luonnolliset luvut. Yhteenlaskun käsitettä laajennetaan koskemaan seuraavaksi suuria luonnollisia lukuja ja kokonaislukuja. Lopulta yhteenlasku on käsite, joka kattaa kaikki lukujoukot. Mikäli oppijalle muodostuu virhekäsitys siitä, että yhteenlasku koskee vain luonnollisia lukuja, on hänen hankalaa oppia esimerkiksi murtolukujen yhteenlaskua.

Mahdollisimman varhaisessa vaiheessa virhekäsityksen tunnistaminen ja korjaaminen mahdollistaa oppijan taitojen karttumisen ja estää virheellisten menettelytapojen käyttämisen. Sinikka Huhtala on väitöstutkimuksessaan (2000) tutkinut lähihoitajaopiskelijoiden matemaattisia virhekäsityksiä eli miniteorioita. Miniteoriat ovat opettamisen ja opiskelun kautta tulleita virheellisiä teorioita ja sääntöjä, joita opiskelija pyrkii soveltamaan tehtävien ratkaisuun. Esimerkkejä tällaisista teorioista ovat muun muassa se, että kertolaskun tulos on aina tekijöitä suurempi ja vähennyslaskussa suuremmasta vähennetään aina pienempi. Miniteoriat syntyvät heikosta käsitteellisestä tiedosta, jota satunnaiset tehtävien oikein ratkaisemiset ovat tukeneet. Tämän vuoksi kokonaiset aihealueet saattavat jäädä oppimatta, ja käsitteellinen tieto aiheesta korvautuu miniteorioiden joukolla.

Matematiikan didaktiikan alalla ei ole standardoitua virheiden luokittelujärjestelmää, jonka vuoksi onkin olemassa lukuisia erilaisia ja eri ikäisille suunnattuja virhemalleja ja -analyyseja. Osa järjestelmistä on hyvin yksityiskohtaisia virheiden analyysin suhteen, kun taas toisissa malleissa on keskitytty tarkasti tiettyyn matematiikan osa-alueeseen. Monet mallit ottavat kantaa lukemisen ymmärtämiseen ja toimivat parhaiten vain tietylle ikäryhmälle.

Taipale on väitöskirjassaan (2009) tutkinut lukivaikeuksien ja matematiikan vaikeuksien päällekkäisyyttä nuoruusiässä. Tutkimuksessa on luotu virheiden luokittelujärjestelmä, jossa jaetaan virheet proseduaalisiin ja konseptuaalisiin virheisiin. Proseduaalisia virheitä on eritelty vielä eri laskutoimitusten mukaan seitsemään luokkaan. Tutkimuksessa on analysoitu konseptuaalisista virheistä ainoastaan suuruusluokkaan liittyviä virheitä. Taipaleen mukaan noin puolet virheellisistä tai tyhjistä vastauksista on konseptuaalisia virheitä ja kolmasosa konseptuaalisista virheistä on suuruusluokkavirheitä. Tutkimusten perusteella siis suurin osa konseptuaalisista virheistä on käsitteiden ymmärtämiseen liittyviä virheitä. Lisäksi Taipaleen mukaan pojat tekevät tyttöjä enemmän konseptuaalisia virheitä ja ammattioppilaitoksen opiskelijat lukiolaisia enemmän.

Ilvesjoki ja Suvilehto ovat tutkineet opinnäytetyössään (2004) ammatillisen oppilaitoksen opiskelijoiden algoritmillista hallintaa virheanalyysin avulla. Virheluokittelu on muodostettu peruslaskutoimitusten algoritmillisuutta silmällä pitäen ja se soveltuu huonosti muiden matematiikan osa-alueiden virheiden analysointiin. Virheluokittelussa on kahdeksan pääluokkaa, jotka ovat virheellinen laskutoimitus, asettelun virheet, laskuvirheet, muistiinvientivirheet, lainausvirheet, välivaiheen virheet, desimaalipilkun virheet ja muut virheet. Jokainen luokka on myös jaoteltu useampaan alaluokkaan. Alaluokat on jaoteltu vertailun helpottamiseksi asettelun virheisiin, laskuvirheisiin, menetelmällisiin virheisiin, systemaattisiin ja virheellisiin algoritmeihin sekä epätäydellisiin algoritmeihin. Tutkimuksessa ei oteta kantaa siihen, ovatko virheet systemaattisia vai satunnaisia.

Ilvesjoen ja Suvilehdon mukaan suurin osa peruslaskutoimitusten virheistä ammatillisen oppilaitoksen opiskelijoilla johtuu huonosta lukujen paikkajärjestelmän hallinnasta ja algoritmien heikosta hallinnasta.

Veloo, Krishnasamy ja Abdullah ovat tutkineet malesialaisten 10.-luokkalaisten tekemiä virheitä matemaattisten symbolien, kuvaajien ja ongelmanratkaisun parissa. Tutkimuksen mukaan yli puolet opiskelijoiden tekemistä virheistä oli käsitteellisiä virheitä. Virheiden syiksi tutkijat luettelevat ymmärryksen puutteen, prosessien unohtamisen, huolimattomuuden tehtävien informaation lukemisessa, muun huolimattomuuden ja arvailun. Syyt virheiden syntymiseen eivät kuitenkaan olleet käsitteelliseen ymmärrykseen liittyviä virheitä vaan painottuivat ennemminkin huolimattomuuteen.

Virheanalyysimalleja on rakennettu myös sen perusteella, onko tehtävän ratkaisu saatettu loppuun vai ei. Fong on tutkinut 11-vuotiaiden oppilaiden sanallisissa ongelmanratkaisutehtävissä tekemiä virheitä. Hän on jaotellut vastaukset ensin viiteen luokkaan ratkaisun perusteella: ei ratkaisua, irrelevantin konseptin tai prosessin käyttäminen, virheetön kesken jäänyt tehtävä, virheellinen kesken jäänyt tehtävä ja virheellisesti ratkaistu tehtävä. Jonkinasteisen ratkaisun sisältävät ratkaisut on vielä jaoteltu virheen mukaan kielellisiin virheisiin, operationaalisiin virheisiin, matematiikan teorian virheisiin ja psykologisiin virheisiin. Luokittelu on muodostettu kuvatunlaiseksi siksi, että Fong on olettanut oppilaiden omaavan tehtävätyypin ratkaisuun sopivan mentaalisen mallin, vaikka se olisikin virheellinen.

Myös virheiden korjautuvuutta opetuksen avulla on tutkittu. Schnepper ja McCoy ovat tutkineet yliopisto-opiskelijoiden tekemiä virheitä ja erityisesti sitä, millaiset virheet korjautuvat opettajan antaman palautteen perusteella. Tutkimuksessa opiskelijoiden tekemät virheet luokitellaan viiteen luokkaan: puutteellisiin vastauksiin, väärin käytettyyn tietoon, teknisiin virheisiin, virheisiin, jotka johtuvat aikaisemmin käydyn asian heikosta hallinnasta ja vääriin määritelmiin. Tutkimuksen mukaan opettajan antama palaute ja ohjeistaminen korjasivat parhaiten niitä virheitä, jotka johtuvat puutteellisista vastauksista, vääristä määritelmistä tai väärin käytetystä tiedosta. Mikäli virhe johtuu teknisestä virheestä tai aikaisemmin opitun tiedon väärin ymmärtämisestä, opettajan ohjeella ja neuvolla on vain pieni vaikutus virheen korjaamiseen. Tutkimuksen perusteella aikaisemmin rakennettujen mentaalisten mallien ja miniteorioiden korjaamiseksi opettajan neuvolla ei ole suurta merkitystä eli konseptuaaliset virheet eivät korjaannu yhtä helposti kuin proseduaaliset virheet.

2.4 Virheet opetustapahtuman näkökulmasta

Opetustapahtuma käsitetään interaktiotapahtumaksi, jossa tähdätään oppijan kehityksen edistämiseen jonkin tietyn tavoitteen suuntaisesti. Tyypillisesti opetustapahtumassa ovat läsnä ainakin oppija ja opettaja. Virheiden syntyminen sijoittuu nimenomaan opetustapahtumaan. Opetustapahtumassa syntyvät virheet voidaan luokitella matematiikan virheiden tutkimuksessa matemaattisiin ja didaktisiin virheisiin. Matemaattiset virheet ovat virheitä, joita oppilas tekee. Didaktiset virheet ovat puolestaan opettajan opetustapahtumassa tekemiä virheitä. Matemaattiset virheet johtuvat yleisesti didaktisista virheistä. Matemaattisia virheitä tutkimalla voidaan kuitenkin jäljittää se didaktinen virhe, joka on opetustapahtumassa syntynyt. (Kansanen 2004).

Didaktisia virheitä voidaan luokitella opettajan toimien mukaan seitsemään eri luokkaan: käsitteen epäjohdonmukainen esittäminen, epäsopivien esimerkkien esittäminen käsitteestä, epäsopivien ongelmien esittäminen aiheen havainnollistamiseksi, perustaitojen harjoittelun aliarvioiminen, opettajan sopimaton reaktio virheisiin, epätarkkojen metodien käyttö havainnollistamisessa ja tuntityöskentelyn pohjautuminen vain tiettyjen oppilaiden aktiivisuudelle. Opettajan ei pitäisi pelätä oppilaiden tekemiä virheitä vaan ottaa ne rakentavasti ja korjata opetustaan virheiden viitoittamalla tavalla. Tämän vuoksi opettajan tulisi työssään aktiivisesti analysoida ja pohtia oppilaiden tekemiä matemaattisia virheitä. Monesti virhe kertoo enemmän opetustapahtuman tavoitteen saavuttamisesta kuin vastauksen oikeellisuus. (Kansanen 2004, Legutko 2008)

Virhekäsitysten muodostumisen ehkäiseminen on helpompaa kuin niiden korjaaminen. Tämän vuoksi onkin tärkeää, että opettaja kiinnittää erityistä huomiota omaan toimintaansa opetustapahtumassa. Tärkeää on myös se, että oppilas korjaa itse virheensä ja virhekäsityksensä sen sijaan, että opettaja tai toinen oppilas tekee sen. Vaikka erehtyminen on inhimillistä, ei ole tarkoituksenmukaista, että jokainen opettaja tekee samat didaktiset virheet. (Kansanen 2004).

3 Tutkimuskysymykset ja tutkimustehtävä

Tämän tutkimuksen tehtävänä on analysoida ja tulkita millaisia virheitä yhdeksäsluokkalaiset tekevät avaruusgeometrian tehtävissä sekä selvittää opettajaopiskelijoiden ennakkokäsitystä yhdeksäsluokkalaisten tekemistä virheistä. Tutkimustehtävää täydentäviä tutkimuskysymyksiä ovat:

- Liittyvätkö avaruusgeometrian eri tehtävissä tehdyt virheet toisiinsa?
- Liittyvätkö avaruusgeometriassa tehtävät virheet yleiseen osaamiseen?
- Miten hyvin opettajaopiskelijoiden käsitykset tyypillisistä virheistä vastaavat yhdeksäsluokkalaisten tekemiä virheitä?

Tutkimuskysymyksiin pyritään löytämän vastauksia tutkimalla laajaa oppilasaineistoa sekä kvantitatiivisin että kvalitatiivisin menetelmin. Lisäksi vastauksia tutkimuskysymyksiin pyritään löytämään tutkimalla opettajaopiskelijoilta kerättyä aineistoa.

4 Tutkimuksen toteutus

Tässä luvussa esitellään tutkimusaineisto ja sen keruumenetelmät. Tutkimuksessa käytettävä aineisto koostuu kahdesta erillisestä aineistosta, 9.luokkalaisilta kerätystä oppilasaineistosta ja yliopisto-opiskelijoilta kerätystä opiskelija-aineistosta.

4.1 Oppilasaineiston keruu ja aineiston käyttö aikaisemmissa tutkimuksissa

Tutkimuksen aineistona käytetään Opetushallituksen vuonna 2012 keräämää aineistoa matematiikan oppimistulosten arvioinnista peruskoulun päättövaiheessa. Aineisto on osa matematiikan oppimistulosten pitkittäisarviointia. Tutkimus aloitettiin vuonna 2005 ja se kesti vuoteen 2017 asti. Tutkimuksen tarkoituksena oli kartoittaa matematiikan osaamisen muutosta peruskoulun ja toisen asteen koulutuksen aikana. Tutkimuksessa tutkittiin myös oppilaiden asenteita ja niiden muutosta matematiikkaa kohtaan ja pyrittiin löytämään selittäviä syitä asenteiden ja osaamisen muutokseen.

Aineistoa on kerätty yli 3000 perusopetuksen oppilaalta siten, että huomioon on otettu eri läänit, kuntaryhmät ja kieliryhmät. Näin ollen tulokset ovat yleistettävissä koko populaatioon. Samoja oppilaita on testattu matematiikan asenteiden ja osaamisen mukaan 3. luokan alussa, 6. luokan alussa ja 9. luokan lopussa. Nämä ovat perusopetuksen opetussuunnitelman perusteiden nivelvaiheita, joissa opetussuunnitelma vaihtuu. Tutkitut oppilaat ovat sellaisia, jotka ovat käyneet koko perusopetuksen saman opetussuunnitelman mukaisesti. Tutkimuksen aikana havaittiin jonkin verran katoa oppilaspopulaation suhteen eli kaikkia 6. luokkalaisille suunnatun kyselyn vastaajia ei ole pystytty tavoittamaan 9. luokan lopussa. Peruskoulun päättövaiheen oppistulosten tutkimus toteutettiin huhtikuussa 2012, joten kaikkia perusopetuksen oppivelvollisuuden oppisisältöjä ei ollut ehditty vielä käymään läpi.

Tutkimuksessa käytetyt matematiikan tehtävät on laadittu yhteistyössä Opetushallituksen asiantuntijoiden ja kokeneiden opettajien kanssa. Tehtävät on jaoteltu oppisisältöjen mukaan kolmeen kategoriaan: luvut, laskutoimitukset ja algebra, geometria sekä tietojen käsittely, tilastot ja todennäköisyys. Jaottelu on pidetty samana läpi tutkimuksen, jolloin osaamista on ollut helpompi verrata aihealueittain. Tutkimuksesta on jätetty pois 9. luokan oppisisältöihin kuuluvat funktiot vertailtavuuden parantamiseksi. Eri vuosiluokilla järjestetyt tutkimukset pitivät sisällään ankkuritehtäviä eli tehtäviä, joiden osaamista tutkittiin jokaisella tutkimuskerralla. Osa ankkuritehtävistä siirrettiin eri kategoriaan eri vuosina tutkittavien osaamisen lisääntymisen vuoksi.

Pitkittäistutkimuksessa on tutkittu myös opettajan ja koulun vaikutusta matematiikan osaamiseen ja asenteisiin matematiikkaa kohtaan. Tutkimuksella on kerätty myös tietoa opettajista, ja opettajat on pystytty yhdistämään oppilaiden vastauksiin. Tällä tavalla on pyritty selvittämään opetusjärjestelyiden ja opettajien taustojen vaikutusta asenteisiin ja osaamiseen. Tutkimuksen mukaan opettajan taustalla ei ole vaikutusta oppilaiden osaamiseen, mikäli opettajalla on muodollinen kelpoisuus matematiikan opettamiseen. Myöskään opettajan sukupuoli ei vaikuttanut oppilaiden matemaattiseen taitoon. Kuitenkin yhteistoiminnallista ja oppilaat osallistavaa opetusta käyttävien opettajien oppilaat olivat taitotasoltaan korkeammalla muuhun otosjoukkoon verrattuna.

Tutkimus on jatkunut vielä selvityksellä toisen asteen opiskelijoiden taitotasosta ja asenteiden analysoinnilla. Pitkittäistutkimukseen osallistuneita oppilaita on tutkittu toisen asteen päättövaiheessa. Tutkimuksessa on selvitetty muun muassa lyhyen ja pitkän matematiikan lukijoiden välistä taitotasoeroa sekä tutkittu sitä, mitkä syyt selittävät osaamisen ja asenteiden muutosta toisen asteen opiskelijoilla. Koska tutkimusaineistoa on kerätty samoilta nuorilta usealta vuodelta, on tutkimuksen avulla pyritty selvittämään myös asenteiden ja osaamisen vaihtelua vuosittain.

Pitkittäistutkimuksessa matematiikan oppimistulosten arvioinnissa ei ole tutkittu oppilaiden tekemiä virheitä millään tutkimuskerralla. Koska tutkimuksessa käytetyt matematiikan tehtävät pitävät sisällään ankkuritehtäviä, joihin tutkittavat ovat jo ensimmäisellä tutkimuskerralla vastanneet, voidaan aineiston avulla tutkia yksinkertaisten käsitteiden omaksumista. Tämän tutkimuksen tarkoituksena onkin perehtyä eritasoisten käsitteiden omaksumiseen virheiden analysoinnin näkökulmasta.

4.2. Oppilasaineiston käyttö tässä tutkimuksessa

Tässä tutkimuksessa käytetty aineisto on alkuperäisen Opetushallituksen tutkimusaineiston osa, joka on kerätty perusopetuksen päättövaiheessa olevilta oppilailta. Tämä osa on niin kutsuttu sensoriaineisto. Aineisto on koottu valitsemalla sattumanvaraisesti kouluja ja valittujen koulujen oppilasvastauksista on otettu sattumanvaraisesti 10 prosenttia vastauksista. Sensoriaineisto koostuu 683:n oppilaan vastauksista. Nämä valitut vastaukset on pisteytetty ja arvioitu kokonaisuudessaan alkuperäisen tutkimuksen luotettavuuden takaamiseksi. Sensoriaineistossa on mukana erilaisia kouluja ja vastaukset ovat sekä suomen- että ruotsinkielisiä.

Oppilasaineisto koostuu neljästä tehtävästä, joista kaksi on avaruusgeometriaan liittyvää tehtävää ja kaksi lukuihin ja laskutoimituksiin liittyvää tehtävää (ks. luvut 5.1 ja 5.2). Avaruusgeometriaan liittymättömistä tehtävistä käytetään tässä tutkimuksessa termiä kontrollitehtävä.

4.3 Opiskelija-aineiston keruu

Kaksiosainen opiskelija-aineisto kerättiin syyskuussa 2017 Helsingin yliopiston opiskelijoilta. Aineisto koostuu yksilöaineistosta, jonka otoskoko oli 20, ja ryhmäaineistosta, jonka otoskoko oli 21. Otokseksi valikoitui kurssin Yliopistomatematiikkaa aineenopettajan näkökulmasta -kurssin opiskelijat. Otoksen opiskelijat olivat pääosin matematiikan aineenopettajaksi opiskelevia, mutta myös muiden aineiden opettajiksi opiskelevia sisältyi otokseen. Kaikki otokseen valikoituneista opiskelijoista olivat joko käyneet opettajan pätevyyteen vaadittavat kasvatustieteen opinnot tai olivat aikeissa suorittaa ne. Kaikki vastaukset olivat suomenkielisiä.

Opiskelijoilta kerätty yksilöaineisto koostui kahdesta avaruusgeometrian aiheisesta tehtävästä. Tehtävät olivat samoja kuin oppilasaineiston avaruusgeometrian tehtävät. Opiskelijoita oli ohjeistettu etukäteen saatekirjeessä (liite 1) ottamaan mukaan muistiinpanovälineet ja laskin, mutta heille ei ollut kerrottu, millaisia tehtäviä heidän tulee ratkaista. Opiskelijoilla oli 15 minuuttia aikaa laskea annetut kaksi tehtävää ja tehtävät tuli suorittaa yksin.

Opiskelijoilta kerätty ryhmäaineisto kerättiin samalla kurssin kokoontumiskerralla kuin yksilöaineisto. Yksilöaineiston keruun jälkeen opiskelijat muodostivat vapaasti noin viiden hengen ryhmiä. Ryhmissä opiskelijoiden oli tehtävänä pohtia, millaisia virheitä yhdeksäsluokkalaiset voisivat tehdä tutkittavana olevissa avaruusgeometrian tehtävissä ja mistä virheet voisivat johtua. Opiskelijat keskustelivat ryhmissä aiheesta ja kirjasivat ylös keskustelun tuloksia (liitteet 2 ja 3). Lopuksi opiskelijat esittivät pohdintojaan muille kurssilaisille. Huomiot kirjattiin ylös ja kaikki saivat osallistua keskusteluun ja pohdintaan.

4.4 Aineistojen analyysimenetelmät

Oppilasaineisto analysoiminen aloitettiin kirjaamalla ylös oppilaiden vastauksia. Vastaajat yksilöitiin käyttämällä alkuperäisessä tutkimuksessa käytettyä koulukoodia ja oppilaan nimikirjaimia. Oppilaan muita tietoja, kuten sukupuolta tai koulumenestystä, ei ollut käytettävissä. Jokainen aineistoon kuuluva tehtäväpaperi käytiin läpi ja tutkittavana olevat neljä tehtävää kopioitiin. Mikäli tehtävä oli oikein, kirjattiin oppilaalle kyseisestä tehtävästä merkintä oikeasta vastauksesta. Mikäli oppilas ei ollut tehnyt tutkittavana olevaa tehtävää lainkaan, kirjattiin tämä tieto ylös. Tutkittavana olleista neljästä tehtävästä kopioitiin oppilaan jokainen virheellinen vastaus.

Oppilasaineiston kvalitatiivista analyysia jatkettiin luokittelemalla virheitä. Virheiden luokitteluun käytettiin menetelmänä sisällönanalyysia ja mukaillen grounded theory-menetelmää. Grounded theory- menetelmällä tarkoitetaan sitä, että tutkimuksen teoria muotoillaan aineiston perusteella (Metsämuuronen 2007). Sisällön analyysi Syrjäläisen mukaan (Metsämuuronen 2007) ja grounded theory- menetelmä muistuttavat ja tukevat toisiaan analyysin välineinä. Virhekategorioita muodostettiin virheiden yleisyyden ja konseptuaalisen virhepäätelmän perusteella. Lisäksi oppilasaineiston perusteella muodostettuja virhekategorioita korjattiin opiskelija-aineistosta nousseiden virhetyyppien perusteella. Huolimatta siitä, että oppilasaineisto oli melko laaja, aineisto saturoitui melko varhaisessa vaiheessa, eikä uusia virhetyyppejä enää ilmennyt.

Oppilas- ja opiskelija-aineiston tilastolliseen analyysiin käytettiin IBM SPSS Statistics 25 -ohjelmaa (myöhemmin SPSS). SPSS-ohjelman avulla oppilas- ja opiskelija-aineistoista muodostettiin frekvenssi- ja prosenttijakaumat virhetyypeittäin. Oppilasaineistosta tutkittiin myös tehtävien osaamisen riippuvuutta. Riippuvuuden tutkimiseksi aineistosta muodostettiin erilaisia ristiintaulukointeja (taulukot luvussa 5.5) ja tehtävien osaamisen riippuvuutta tutkittiin lisäksi khiin neliö-testillä.

5 Tulokset

Tulokset käsitellään tehtävittäin siten, että ensin käsitellään kontrollitehtävät. Tämän jälkeen käsitellään avaruusgeometriaan liittyvät tehtävät tehtävä kerrallaan.

5.1. Kontrollitehtävät

Tässä tutkimuksessa kontrollitehtävien osaamista tutkittiin vain oppilailta.

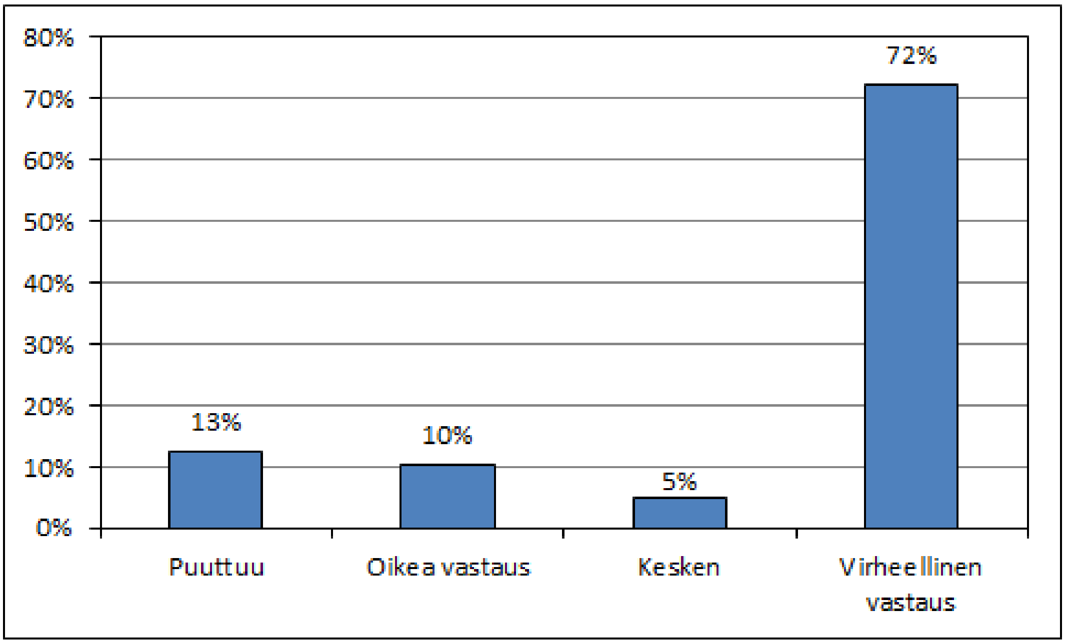
5.1.1 Tehtävän 6 kuvailu ja yleisiä tuloksia

Tehtävä 6 (Kuva 2.) kuuluu sisältöalueeltaan luvut ja laskutoimitukset -kategoriaan. Tehtävässä tulee ratkaista monivalintakokeeseen osallistuneen Liisan oikeiden vastausten lukumäärä. Tehtävän 6 voi ratkaista sekä yhtälöparin että päättelyn avulla.

6 Monivalintakokeessa oli 62 tehtävää. Oikeasta vastauksesta sai kaksi pistettä, väärästä menetti yhden pisteen ja vastaamatta jättämisestä ei annettu pisteitä. Liisa ei vastannut kolmeen tehtävään ja sai tulokseksi 85 pistettä. Kuinka monta tehtävää Liisalla oli oikein?

Kuva 2. Tehtävänanto tehtävään 6.

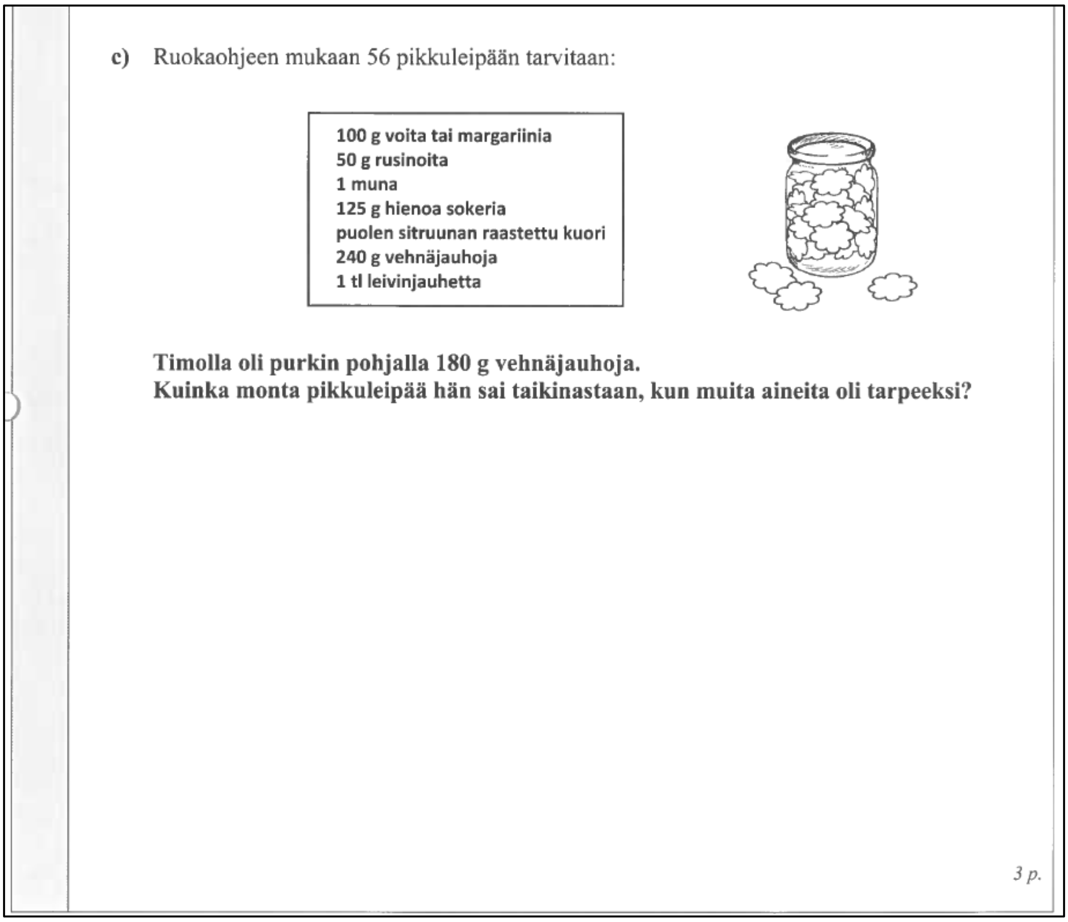
Vastauksista 10 prosenttia oli oikeita vastauksia (Kuva 3.). Tehtävän oppilasvastauksista jopa 72 prosenttia oli vääriä. Puuttuvia vastauksia oli 13 prosenttia ja kesken jääneitä vastauksia tutkittavista vastauksista oli 5 prosenttia. Tehtävä 6 oli siis osattu heikosti ja tehtävä voidaan luokitella haastavaksi kategoriansa (luvut ja laskutoimitukset) tehtäväksi.



Kuva 3. Tehtävän 6 ratkaisujakauma (%).

5.1.2 Tehtävän 8 kuvailu ja yleisiä tuloksia

Tehtävä 8 (Kuva 4.) kuuluu luvut ja laskutoimitukset- kategoriaan. Tehtävässä tulee ratkaista saatavien pikkuleipien määrä, kun käytössä ei ole tarvittavaa määrää aineksia tehtävässä annetun reseptin huomioiden. Tehtävän voi ratkaista usealla eri tavalla.



c) Ruokaohjeen mukaan 56 pikkuleipään tarvitaan:

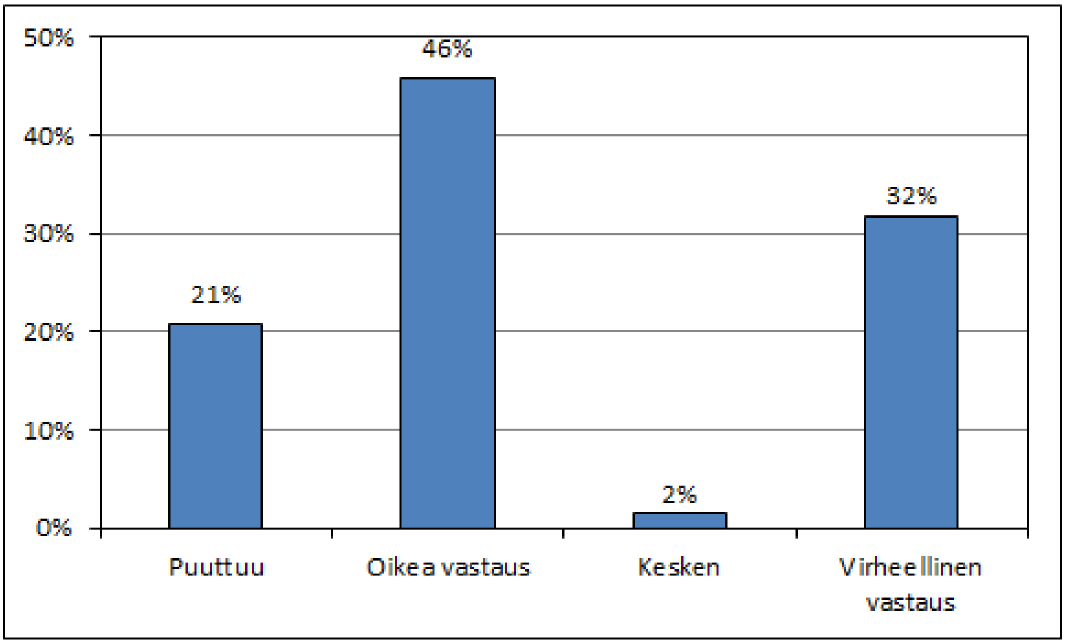
100 g voita tai margariinia
50 g rusinoita
1 muna
125 g hienoa sokeria
puolen sitruunan raastettu kuori
240 g vehnäjauhoja
1 tl leivinjauhetta

Timolla oli purkin pohjalla 180 g vehnäjauhoja.
Kuinka monta pikkuleipää hän sai taikinastaan, kun muita aineita oli tarpeeksi?

3 p.

Kuva 4. Tehtävänanto tehtävään 8.

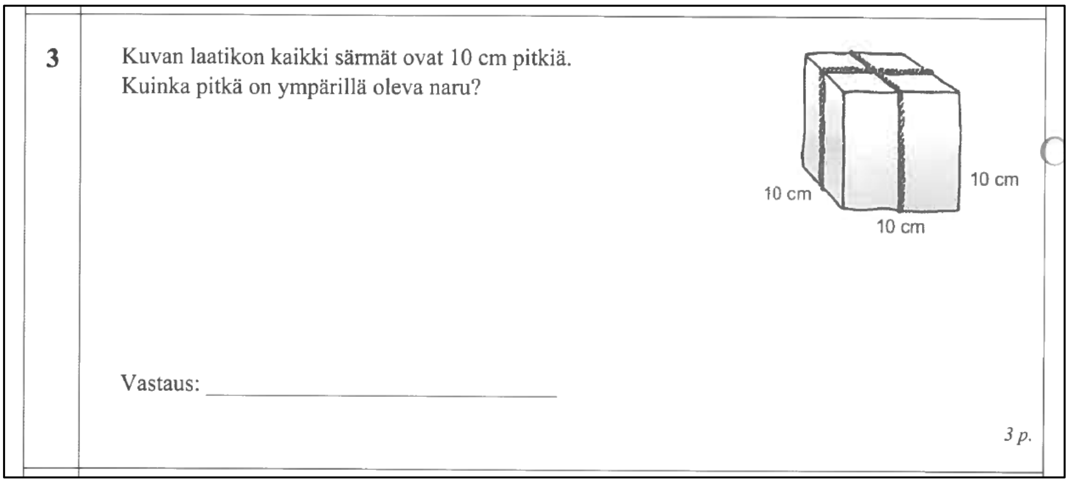
Vastauksista 46 prosenttia oli oikeita vastauksia (Kuva 5.). Kesken jääneitä vastauksia oli kaksi prosenttia, joka oli pienin prosenttiosuus tutkittavana olleiden tehtävien keskeneräisyysprosenteista. Noin viidesosa (21%) vastauksista puuttui. Liki kolmannes (32%) oppilaiden vastauksista oli virheellisiä vastauksia. Liki puolet vastaajista oli osannut ratkaista tehtävän 8. Tehtävässä esitetty ongelma on luultavastikin ollut oppilaille tuttu ja vastaavanlaisia ongelmia ollaan käsitelty myös muissa oppiaineissa. Myös arkielämästä tuttu tilanne on varmastikin helpottanut tehtävän ratkaisemista.



Kuva 5. Tehtävän 8 ratkaisujakauma (%).

5.2 Avaruusgeometriaan liittyvät tehtävät: tehtävä 3

Tehtävä 3 (kuva 6.) oli ankkuritehtävä eli kyseistä tehtävää oli käytetty alkuperäisen aineiston sekä kolmannen että kuudennen luokan tehtävävihossa. Tehtävässä pyydetään ratkaisemaan kuvassa olevan laatikon ympäri kulkevan narun mitta. Tehtävässä kuvaan on merkitty laatikon särmien pituudet ja kuvan perusteella ratkaisijan tulee päätellä, miten naru kulkee laatikon ympärillä. Tehtävän ratkaisemisen haastavuutta lisää se, että ratkaisijan täytyy huomata tilanteen olevan symmetrinen piilossa olevien laatikon tahkojen ja näkyvillä olevien tahkojen kanssa. Tehtävä on luokiteltu Krathwohl–Anderssonin taksonomiassa menetelmätiedoltaan ymmärtämisen tasolle ja käsitetiedoltaan soveltamisen tasolle.


3 Kuvan laatikon kaikki särmät ovat 10 cm pitkiä.
Kuinka pitkä on ympärillä oleva naru?

Vastaus: ______________________________

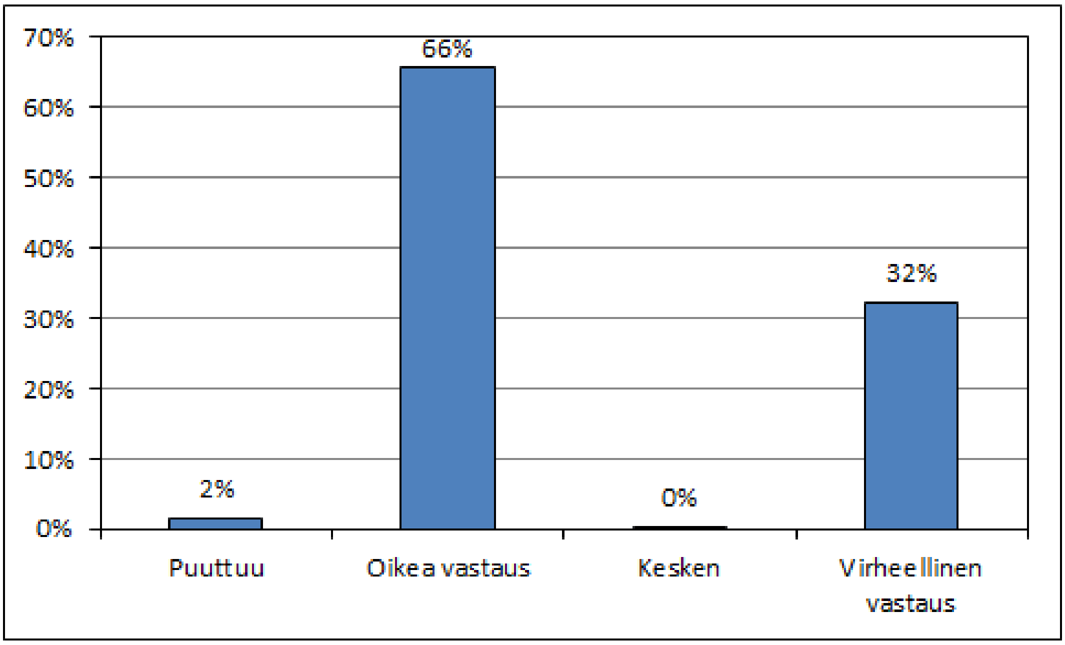
3 p.

Kuva 6. Tehtävänanto tehtävään 3.

5.2.1 Yleisiä tuloksia tehtävästä 3

Tehtävä 3 oli osattu parhaiten tutkittavista tehtävistä ja oikeita vastauksia oli 66 prosenttia (Kuva 7.). Korkeaa ratkaisuprosenttia voi selittää se, että tehtävän osaamista on testattu jo aiemmilla tutkimuskerroilla, ja tehtävää on saatettu myös käsitellä oppitunneilla koetilanteiden jälkeen. Toisaalta kuvan osoittama tilanne on mitä luultavimmin ollut oppilaille hyvin tuttu ja kuvassa esitetyn tilanteen symmetrisyys on ollut selkeää arkielämän kokemusten pohjalta.

Puuttuvia vastauksia oli kaksi prosenttia ja kesken jääneitä tehtäviä oli kaksi kappaletta (0%). Virheellisiksi luokiteltuja vastauksia oli liki kolmasosa (32 %) vastauksista. Tehtävään 3 oli siis osattu joko vastata oikein tai vastattu virheellisellä vastauksella, sillä puuttuvia ja kesken jääneitä vastauksia oli tutkittavassa aineistossa hyvin vähän.



Kuva 7. Tehtävän 3 ratkaisujakauma (%).

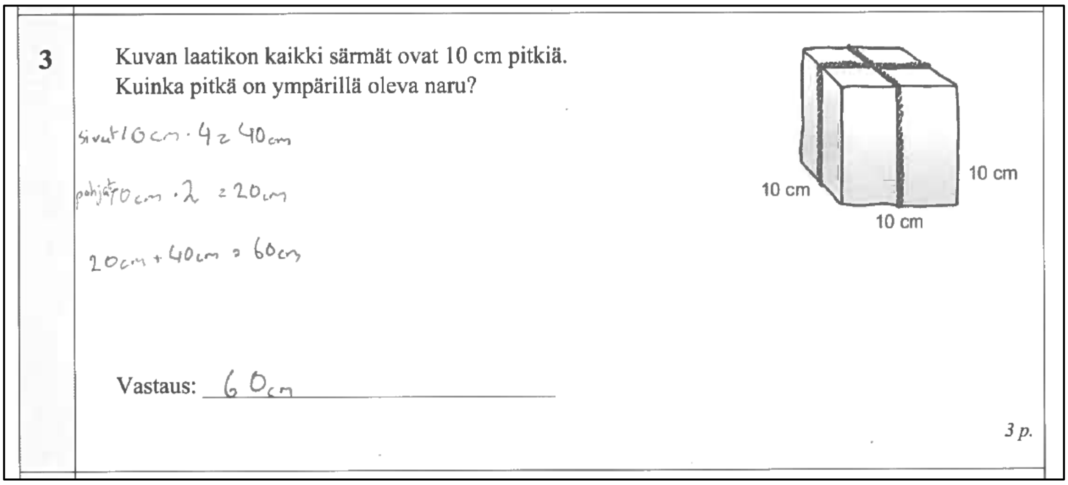
5.2.2 Tehtävän 3 virheelliset vastaukset

Tehtävässä 3 virheelliset vastaukset luokiteltiin neljään kategoriaan. Seuraavaksi esitellään virhekategoriat esimerkkeineen.

Virhekategoria 1: Kuution ympärysmitta

Virhekategoriaan 1 kuuluvat ne virheelliset vastaukset, joiden ratkaisuksi on annettu 60 cm. Esimerkkiratkaisuista käy ilmi, että ratkaisija on ymmärtänyt kuutionmuotoisen laatikon sivujen olevan samanpituiset. Lisäksi ratkaisuun on käytetty tietoa siitä, että kuutiossa on kuusi yhtä pitkää sivua. Ratkaisuissa ei ole kuitenkaan ole otettu huomioon kuvan esittämää tilannetta siitä, miten naru kulkee laatikon ympärillä. Ratkaisuissa käy hyvin ilmi se, että tämän virheellisen ratkaisutavan valinneet ymmärtävät tehtävään liittyvät geometriset käsitteet, mutta eivät ole osanneet yhdistää osaamiaan geometrian taitoja arkipäivän tilanteeseen, jollainen tehtävässä pyydetään ratkaisemaan.

Seuraavaksi esitellään kaksi erilaista virheellistä virhetyypin 1 ratkaisua (Kuvat 8. ja 9.). Ratkaisut on poimittu oppilasvastauksista.

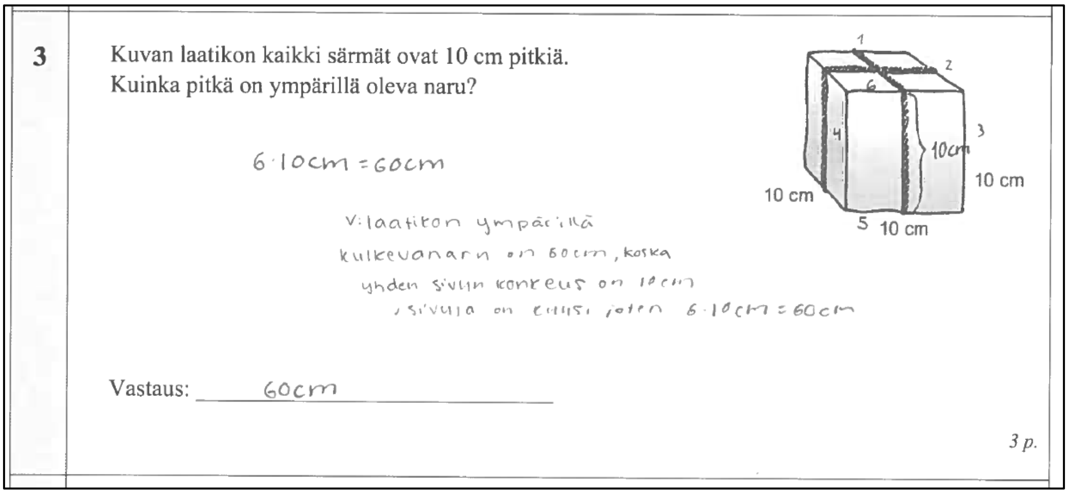

3 Kuvan laatikon kaikki särmät ovat 10 cm pitkiä.
Kuinka pitkä on ympärillä oleva naru?

sivut 10cm · 4 = 40cm
pohjat 10cm · 2 = 20cm
20cm + 40cm = 60cm

Vastaus: 60cm

3 p.

Kuva 8. Tehtävä 3: virhetyyppi 1, esimerkkiratkaisu 1.


3 Kuvan laatikon kaikki särmät ovat 10 cm pitkiä.
Kuinka pitkä on ympärillä oleva naru?

6 · 10cm = 60cm

V: laatikon ympärillä kulkeva naru on 60cm, koska yhden sivun korkeus on 10cm ja sivuja on kuusi, joten 6 · 10cm = 60cm

Vastaus: 60cm

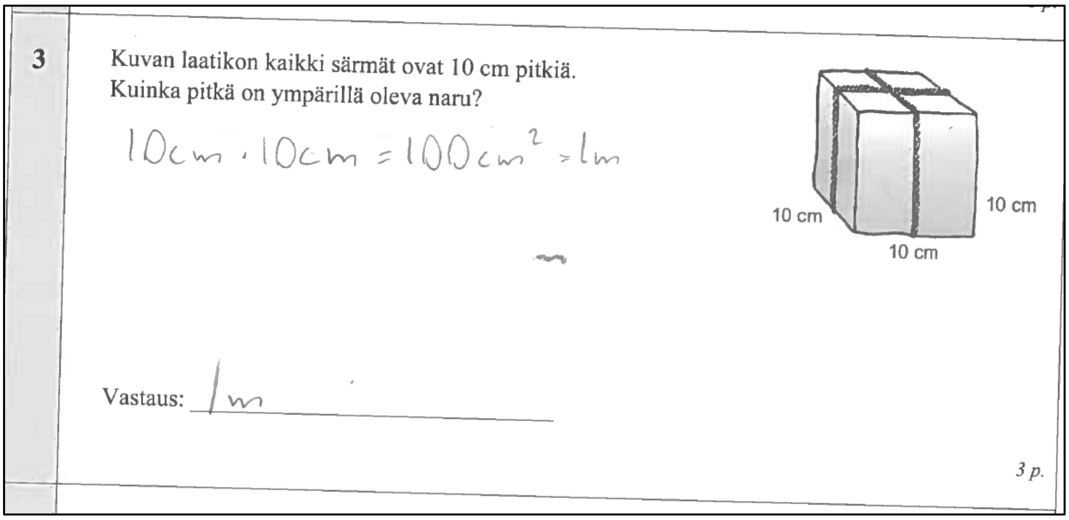
3 p.

Kuva 9. Tehtävä 3: virhetyyppi 1, esimerkkiratkaisu 2.

Virhekategoria 2: Pinta-alan laskeminen

Virhekategoriaan 2 kuuluviksi vastauksiksi luokiteltiin ne ratkaisut, joiden vastauksena oli 100 cm tai 1 metri. Suurin osa tähän virhetyyppiin kuuluvista vastauksista oli saatu kertomalla kaksi sivun pituutta keskenään (Kuva 10.). Näistä ratkaisuista käykin hyvin ilmi se, että oppilas ei ole ymmärtänyt pituuden ja pinta-alan yksiköiden eroa. Vaikka tehtävässä kysyttiinkin laatikkoa ympäröivän narun pituutta, oli monessa virheellisessä vastauksessa annettu vastaukseksi pinta-alan yksikkö. Monet ratkaisut pitivät sisällään lisäksi virheellisiä yksikönmuunnoksia.

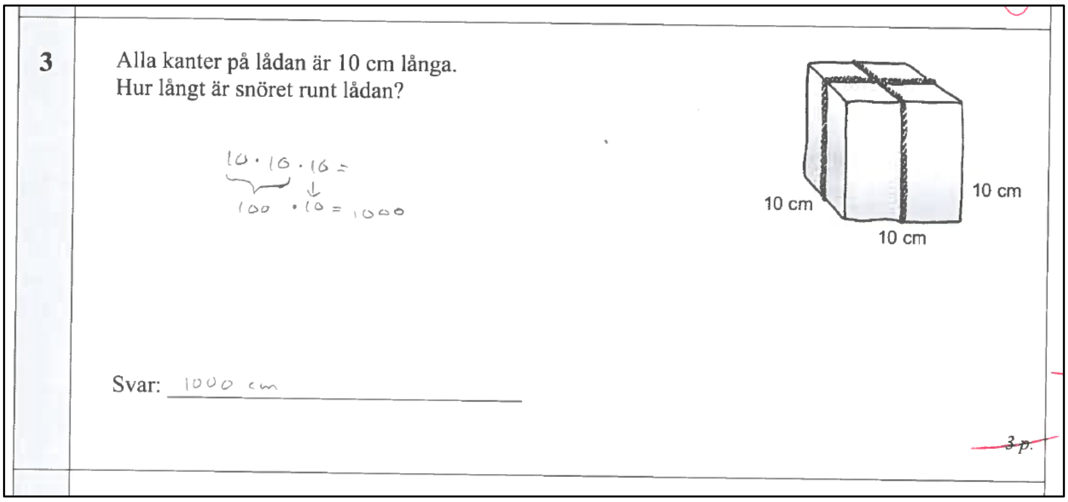
Virhekategoriaan 2 kuuluvat virheet kertovat siitä, että oppilas ei ymmärrä geometristen käsitteiden eroa. Toisin sanoen avaruusgeometrian konseptuaalinen tieto on huonosti jäsentynyt. Toisaalta oppilas on ymmärtänyt, että vastaukseen ei voi tulla tilavuuteen viittaavaa tulosta. Tämä voi selittyä sillä, että tilavuuteen liittyvät yksiköt ovat pituuden ja pinta-alan yksiköitä vieraampia, sillä arkielämässä vetomitat ovat muita tilavuuden yksiköitä tutumpia.



Kuva 10. Tehtävä 3: virhetyyppi 2, esimerkkiratkaisu 1.

Virhekategoria 3: Tilavuuden laskeminen

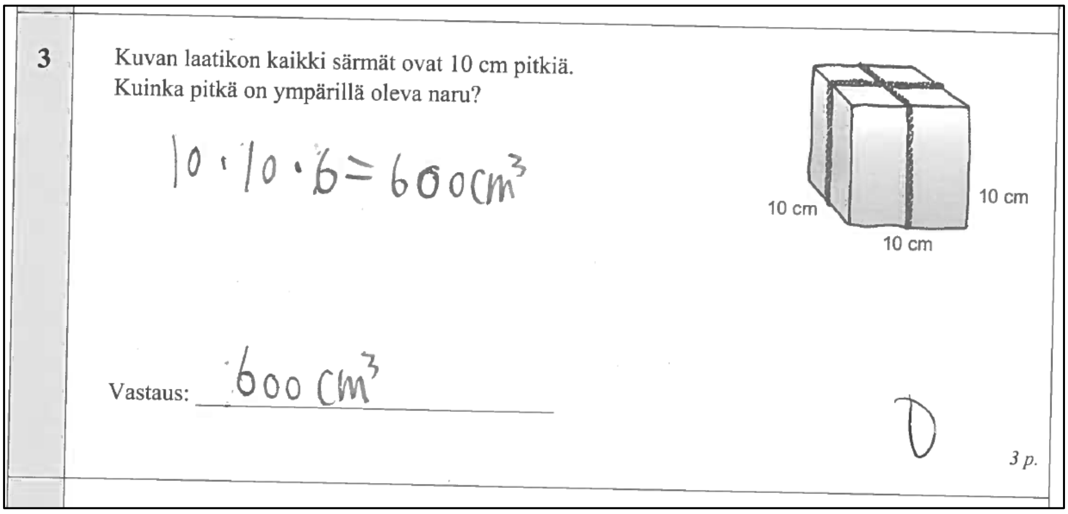
Virhekategorian 3 muodostivat ne ratkaisut, joiden vastauksena oli 1000 cm. Tämä ratkaisu oltiin saatu esimerkiksi kertomalla tehtävänannossa merkityt luvut keskenään. Erityisen tyypillistä oli, että laskutoimitukseen ei oltu merkitty pituuden yksiköitä vaan yksikkö oli lisätty vasta ratkaisuun (Kuva 11.). Tällainen virheellinen vastaus voi kertoa siitä, että oppilas ei ole osannut ratkaista tehtävää lainkaan ja tehtävässä annetut tiedot ovat ohjanneet liiaksi tehtävän ratkaisua. Tällainen virhe kertoo myös konseptuaalisen käsitetiedon puutteesta geometriassa. Toisaalta myös arkielämän ongelman ja matemaattisen osaamisen välinen yhteys on heikko.



Kuva 1. Tehtävä 3: virhekategoria 3, esimerkkiratkaisu 1.

Muut virheelliset vastaukset

Tehtävässä 3 muita kuin kategorisoituja virheellisiä vastauksia oli virheellisistä vastauksista noin kolmasosa. Muutamissa vastauksissa näkyi selkeästi se, että pituuden, pinta-alan ja tilavuuden yksiköt ja näin myös niiden konseptit ei ole olleet oppilailla hallussa. Tällaisista virheellisistä vastauksista esimerkkejä on nähtävissä kuvista 12. ja 13.



3 Kuvan laatikon kaikki särmät ovat 10 cm pitkiä.
Kuinka pitkä on ympärillä oleva naru?

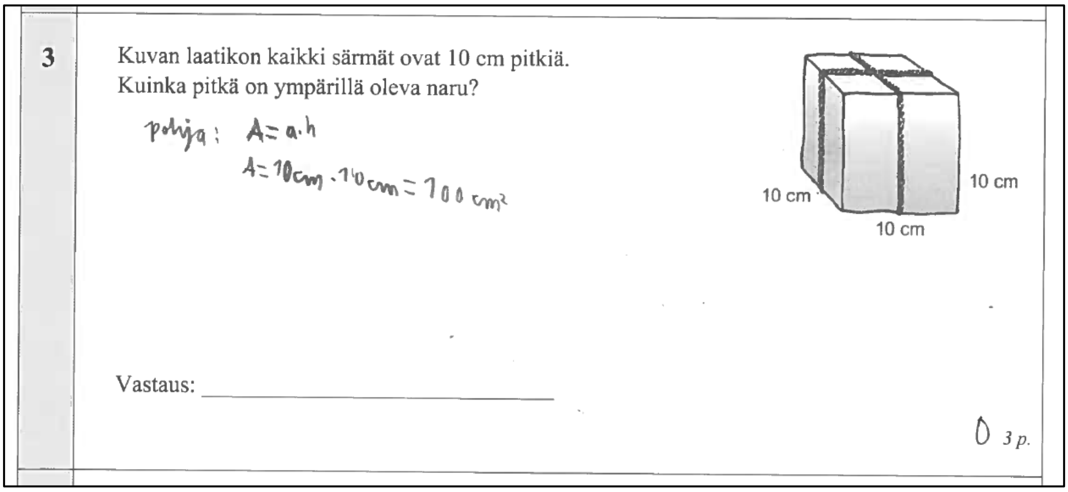
$10 \cdot 10 \cdot 6 = 600 cm^3$

Vastaus: $600 cm^3$

0

3 p.

Kuva 12. Tehtävä 3: muu virheellinen vastaus, esimerkkiratkaisu 1.



3 Kuvan laatikon kaikki särmät ovat 10 cm pitkiä.
Kuinka pitkä on ympärillä oleva naru?

pohja: $A = a \cdot h$

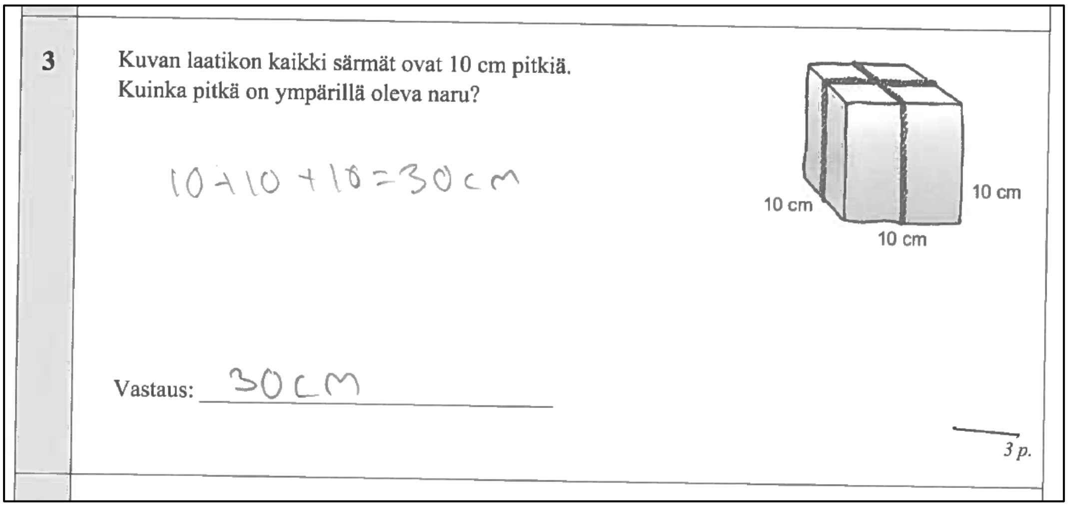
$A = 10cm \cdot 10cm = 100 cm^2$

Vastaus:

0 3 p.

Kuva 13. Tehtävä 3: muu virheellinen ratkaisu, esimerkkiratkaisu 2.

Osassa virheellisistä vastauksista käy ilmi se, että oppilaalla ei ole ollut selkeää käsitystä tehtävän ratkaisutavasta ja kuvassa näkyvät luvut ovat ohjanneet tehtävän ratkaisua (Kuvat 14. ja 15.). Toisaalta näissä virheellisissä ratkaisuissa käy hyvin ilmi se, että oppilas on tiennyt mitä laskee ja ratkaisu on suuruusluokaltaan ja yksiköltään lähellä oikeaa. Nämä vastaukset kertovatkin siitä, että matematiikan vieminen arkielämän ongelmiin on hankalaa.


3 Kuvan laatikon kaikki särmät ovat 10 cm pitkiä.
Kuinka pitkä on ympärillä oleva naru?

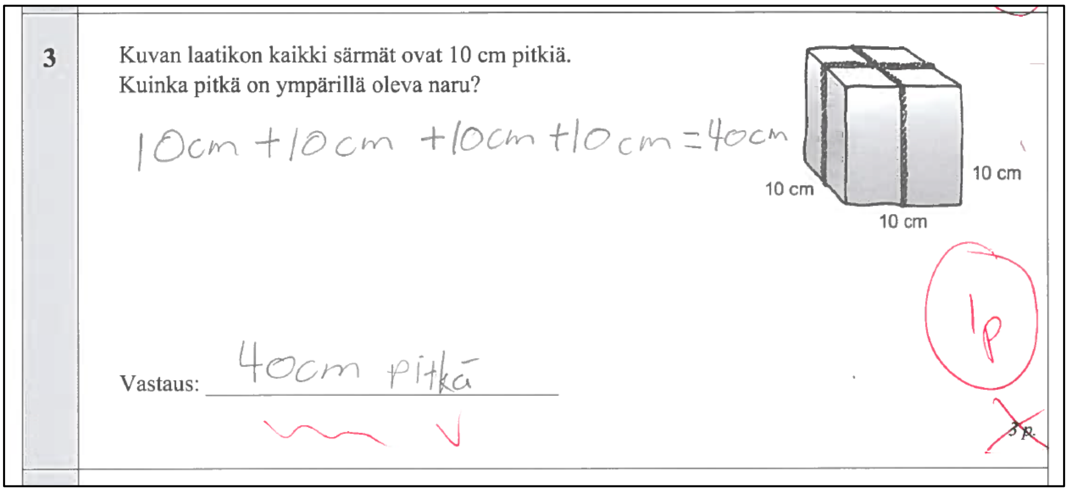
10+10+10=30cm

10 cm
10 cm
10 cm

Vastaus: 30CM

3 p.

Kuva 14. Tehtävä 3: muu virheellinen ratkaisu, esimerkkiratkaisu 3.


3 Kuvan laatikon kaikki särmät ovat 10 cm pitkiä.
Kuinka pitkä on ympärillä oleva naru?

10cm +10cm +10cm +10cm =40cm

10 cm
10 cm
10 cm

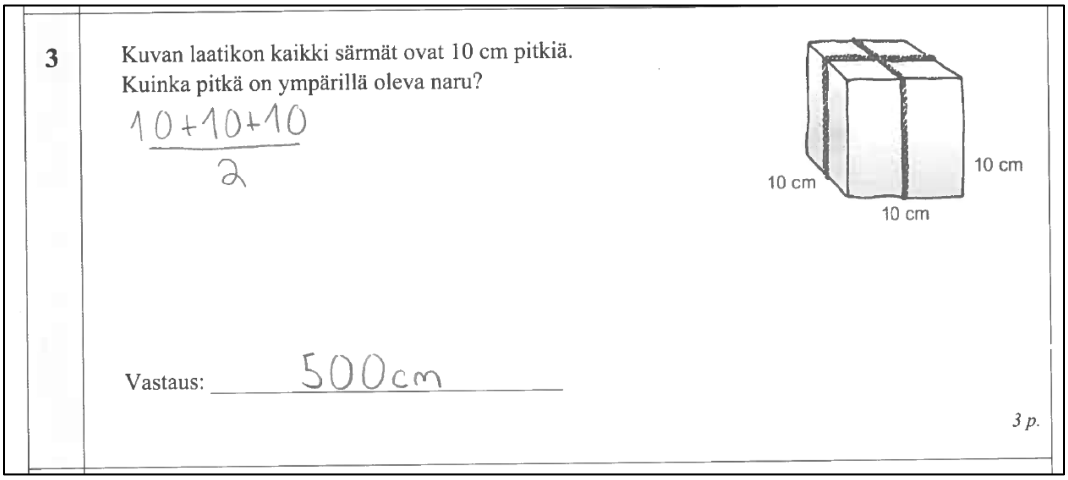
1p

Vastaus: 40cm pitkä

3 p.

Kuva 15. Tehtävä 3: muu virheellinen ratkaisu, esimerkkiratkaisu 4.

Osassa virheellisistä vastauksista oli havaittavissa piirteitä usean eri ratkaisutavan yhdistelemisestä (Kuvat 16., 17. ja 18.). Ratkaisutapojen yhdisteleminen tai vaihtaminen kesken ratkaisun voi kertoa siitä, että oppilas ei ole varma ratkaisustaan. Tämä on vihje siitä, että aiheeseen liittyvä proseduaalinen ja konseptuaalinen tieto on jäsentymätöntä tai jopa virheellistä. Usein tällaisissa virheellisissä ratkaisuissa vastaukset poikkeavat oikeasta vastauksesta suuruusluokaltaan paljon.



3 Kuvan laatikon kaikki särmät ovat 10 cm pitkiä.
Kuinka pitkä on ympärillä oleva naru?

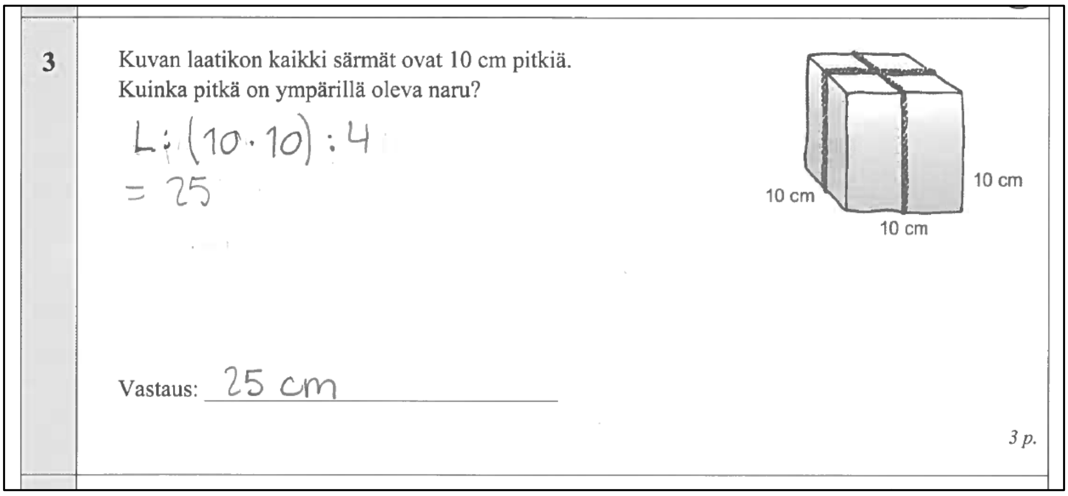
$\frac{10+10+10}{2}$

10 cm 10 cm 10 cm

Vastaus: 500cm

3 p.

Kuva 16. Tehtävä 3: muu virheellinen ratkaisu, esimerkkiratkaisu 5.



3 Kuvan laatikon kaikki särmät ovat 10 cm pitkiä.
Kuinka pitkä on ympärillä oleva naru?

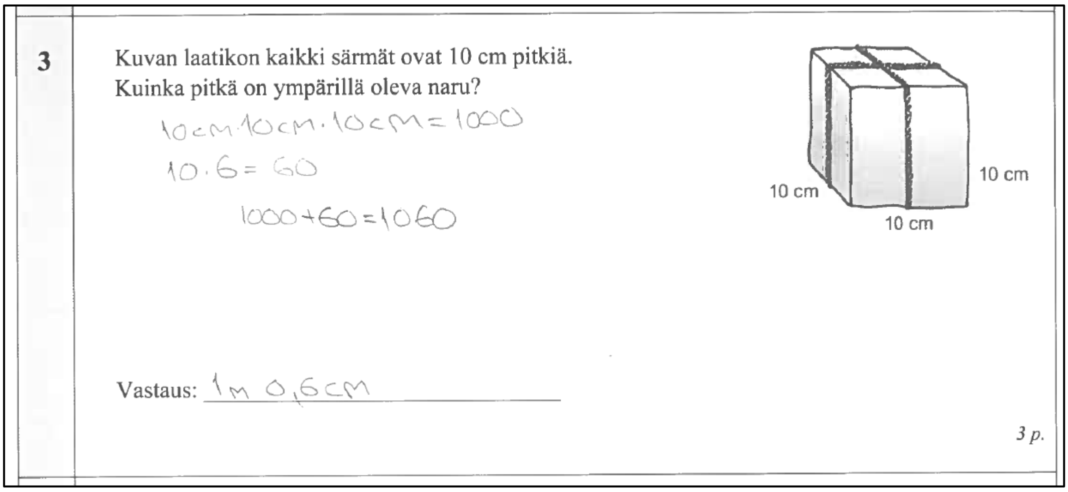
$L: (10 \cdot 10) : 4$
$= 25$

10 cm 10 cm 10 cm

Vastaus: 25 cm

3 p.

Kuva 17. Tehtävä 3: muu virheellinen ratkaisu, esimerkkiratkaisu 6.



3 Kuvan laatikon kaikki särmät ovat 10 cm pitkiä.
Kuinka pitkä on ympärillä oleva naru?

$10cm \cdot 10cm \cdot 10cm = 1000$
$10 \cdot 6 = 60$
$1000 + 60 = 1060$

10 cm 10 cm 10 cm

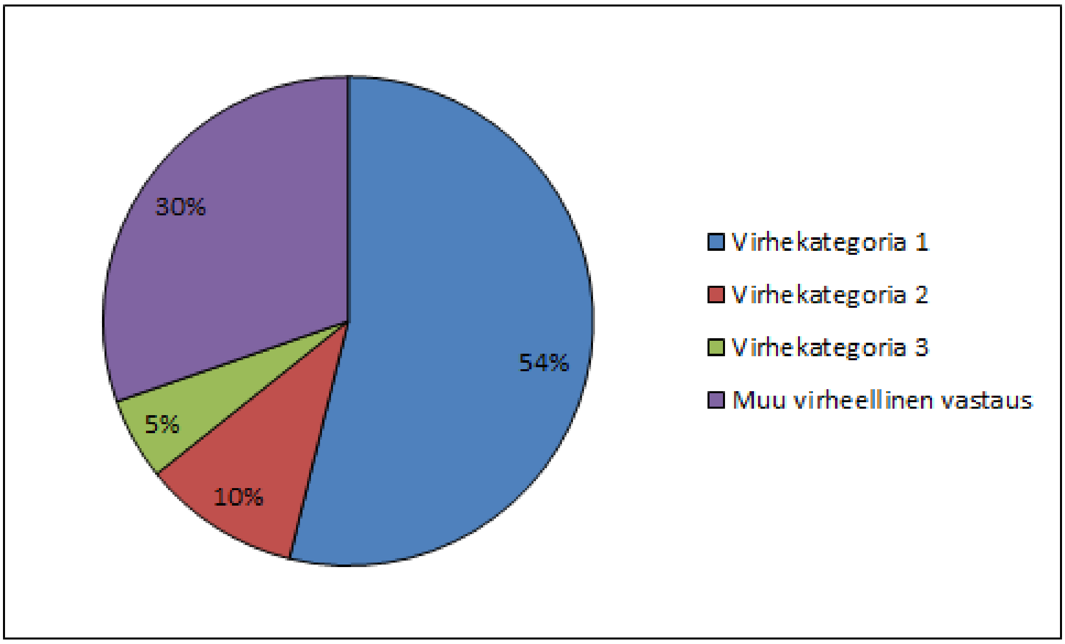
Vastaus: 1m 0,6cm

3 p.

Kuva 88. Tehtävä 3: muu virheellinen ratkaisu, esimerkkiratkaisu 7.

Virheellisten vastausten jakautuminen

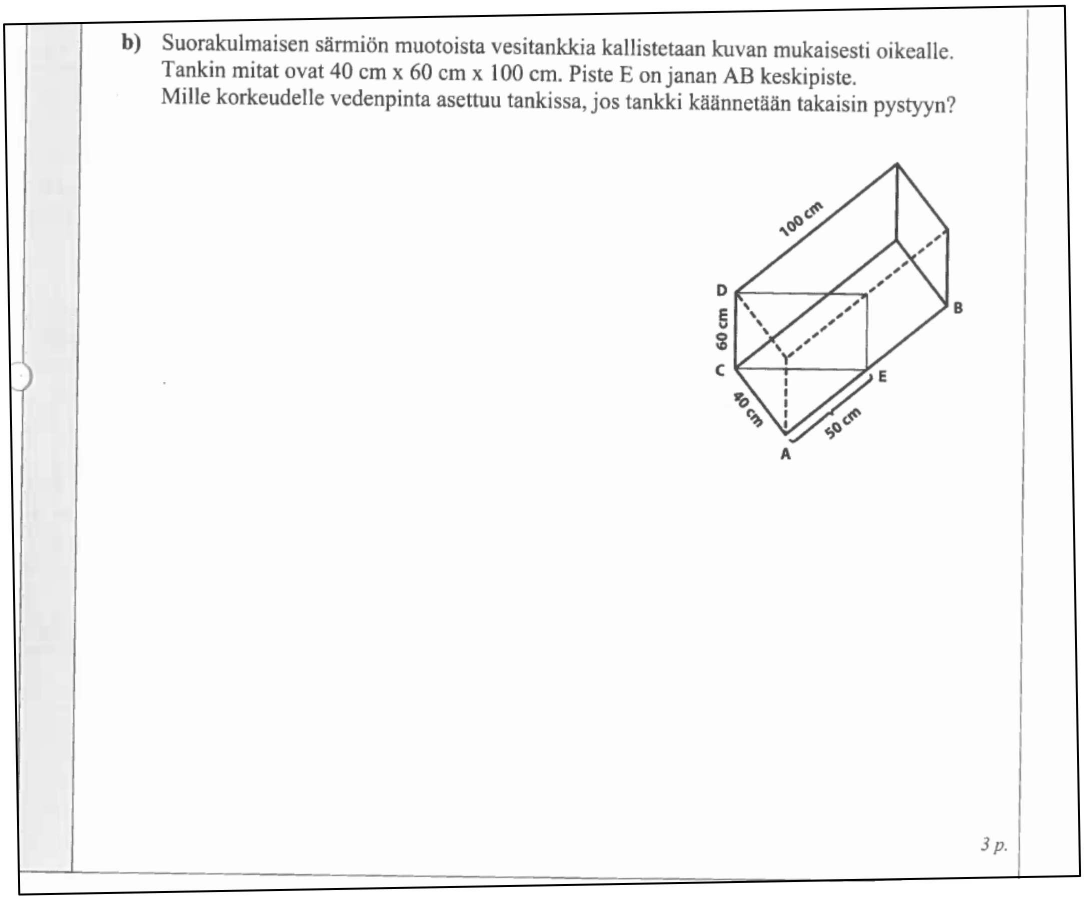
Virheellisistä vastauksista hieman yli puolet (54%) kuului virhekategoriaan 1 (Kuva 19.). Virhekategoriaan 2 kuului 10 prosenttia virheellisistä vastauksista ja viisi prosenttia vastauksista puolestaan kuului virhekategoriaan 3. Virheellisistä vastauksista 30 prosenttia ei kuulunut mihinkään kolmeen pääkategoriaan.



Kuva 19. Tehtävän 3 virheellisten ratkaisujen osuudet (%).

5.3 Avaruusgeometriaan liittyvät tehtävät: tehtävä 10

Tehtävä 10 (Kuva 20.) oli ensimmäistä kertaa pitkittäistutkimuksessa mukana. Tehtävässä esitetään kuva vesitankista, joka on kallistettu kahden kulman varaan. Vesitankissa on vettä, ja tehtävänantona on laskea, kuinka korkealla vesipatsaan pinta asettuu, kun tankki käännetään takaisin pystyyn. Tehtävän oikein ratkaisemiseksi tarvitaan tietoa erimuotoisten kappaleiden tilavuuksien laskemisesta ja hyvää avaruudellista hahmottamiskykyä. Tehtävä on luokiteltu Krathwohl-Anderssonin taksonomiassa menetelmätiedoltaan soveltamisen tasolle ja käsitetiedoltaan analysoinnin tasolle.



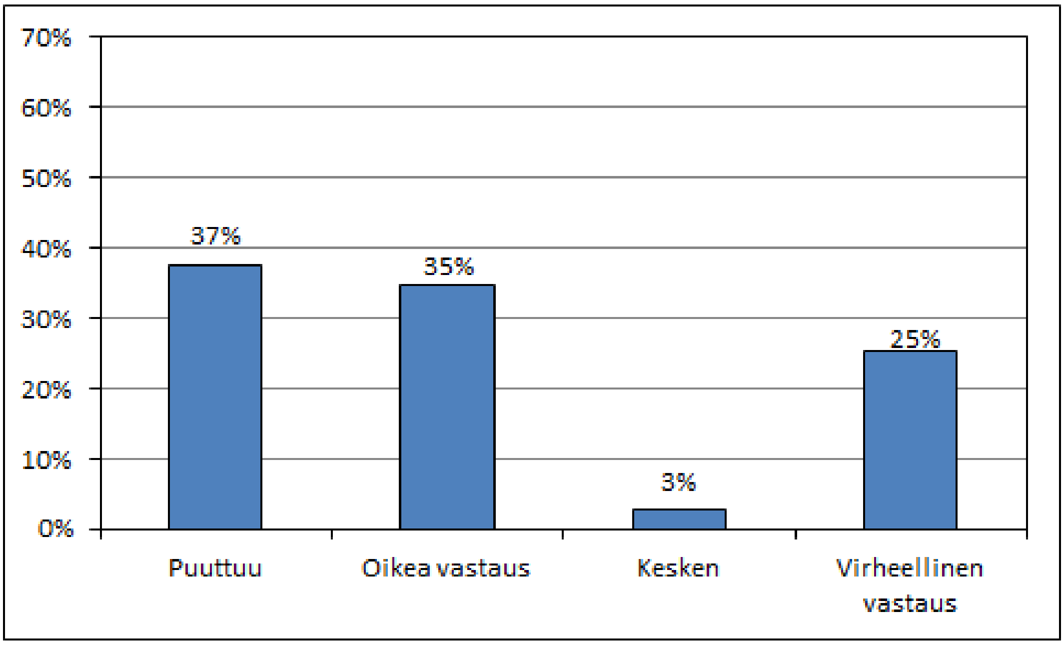
b) Suorakulmaisen särmiön muotoista vesitankkia kallistetaan kuvan mukaisesti oikealle. Tankin mitat ovat 40 cm x 60 cm x 100 cm. Piste E on janan AB keskipiste. Mille korkeudelle vedenpinta asettuu tankissa, jos tankki käännetään takaisin pystyyn?

Kuva 9. Tehtävänanto tehtävään 10.

5.3.1 Yleisiä tuloksia tehtävästä 10

Tehtävässä 10 oikeita vastauksia oli 35 prosenttia vastauksista (Kuva 21.). Tehtävän oikein ratkaisseet olivat osanneet laskea oikein erilaisten kappaleiden tilavuuksia, ja myös päätellä oikein kuvan tilanteen. Osa oikeista vastauksista pohjautui loogiseen päättelyketjuun ja erinomaiseen kuvan tulkitsemiseen.

Puuttuvia vastauksia oli tutkittavista tehtävistä eniten: 37 prosenttia vastauksista. Puuttuvien vastausten määrän voi selittää se, että tehtävä oli tehtävävihossa numerolla 10 ja se oli myös tehtävävihon viimeistä edeltävä tehtävä. Oppilaat saivat ratkaista tehtäviä haluamassaan järjestyksessä, mutta monet oppilaat olivat varmastikin ratkaisseet tehtäviä numerojärjestyksessä. Kesken jääneiksi luokiteltuja vastauksia oli kolme prosenttia. Tämä kertoo siitä, että joko tehtävää ei oltu ehditty aloittaa tai tehtävä oli koettu liian haastavaksi. Neljäsosa vastauksista oli puolestaan virheellisiä vastauksia.



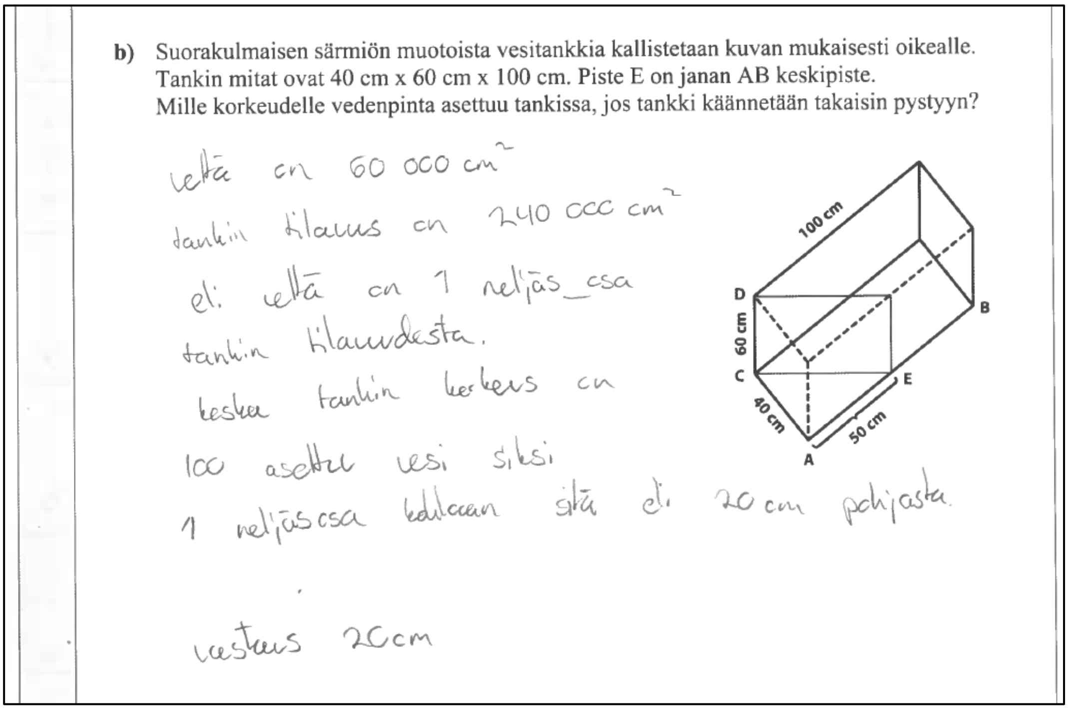
Kuva 10. Tehtävän 10 ratkaisujakauma (%).

5.3.2 Tehtävän 10 virheelliset vastaukset

Tehtävässä 3 virheelliset vastaukset luokiteltiin neljään kategoriaan. Seuraavaksi esitellään virhekategoriat esimerkkeineen.

Virhekategoria 1: Vesipatsas suorakulmaisena särmiönä

Virhekategorian 1 muodostivat ne ratkaisut, joiden vastauksena oli 20 cm. Esimerkkiratkaisuissa (Kuvat 22. ja 23.) näkyy kaksi tyypillistä tapaa virheellisen ratkaisun esittämiseen. Kuvan 22. esimerkissä oppilas on ratkaissut oikein sekä tankin että veden tilavuuden, mutta ratkaissut väärin veden korkeuden tankissa tehtävän lopputilanteessa. Tällainen virhe on proseduaalinen virhe, joita oli vähän tutkittavassa aineistossa.



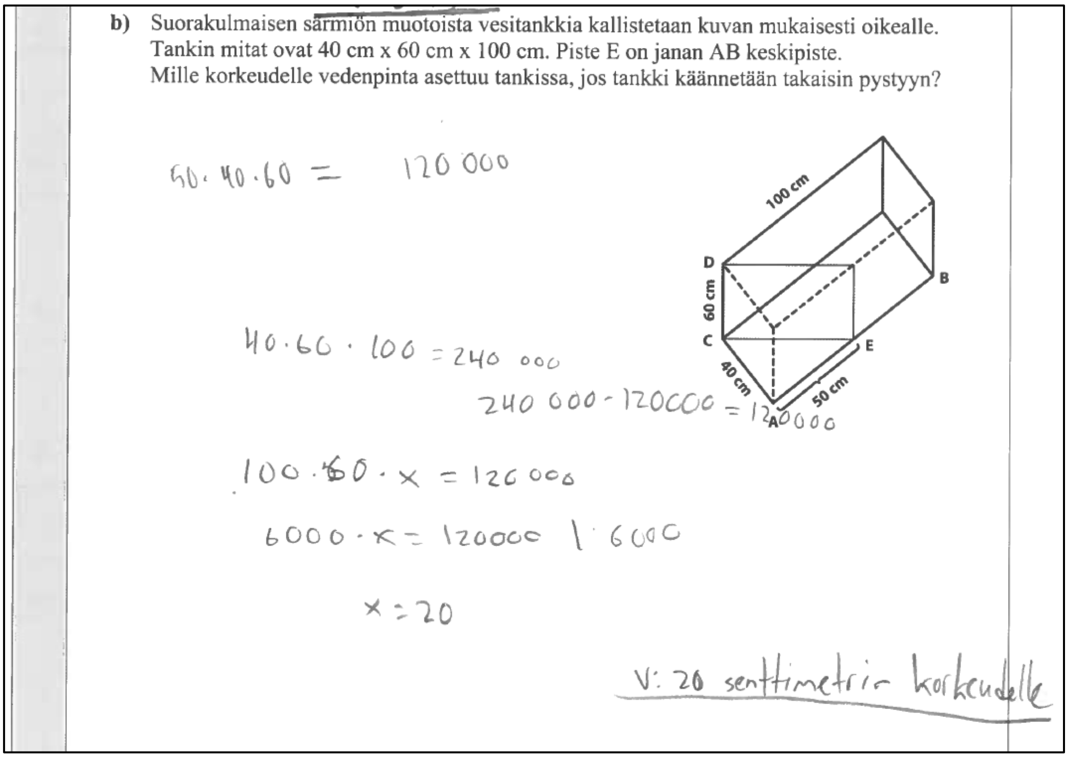
b) Suorakulmaisen särmiön muotoista vesitankkia kallistetaan kuvan mukaisesti oikealle.
Tankin mitat ovat 40 cm x 60 cm x 100 cm. Piste E on janan AB keskipiste.
Mille korkeudelle vedenpinta asettuu tankissa, jos tankki käännetään takaisin pystyyn?

vettä on 60 000 cm²
tankin tilavuus on 240 000 cm²
eli vettä on 1 neljäs_osa
tankin tilavuudesta.
koska tankin korkeus on
100 asettuu vesi siksi
1 neljäsosa korkeuden sitä eli 20 cm pohjasta.

vastaus 20cm

Kuva 112. Tehtävä 10: virhekategoria 1, esimerkkiratkaisu 1.

Toinen virhekategoriaan 1 luokitelluista virheistä esitellään kuvassa 23. Tässä ratkaisussa oppilas ei ole ottanut huomion vesipatsaan muotoa, jonka seurauksena vastaus on virheellinen. Virhe voi johtua siitä, että kuvan lukemisessa on ollut haasteita tai siitä, että oppilas ei ole osannut laskea muun kuin suorakulmaisen särmiön muotoisen kappaleen tilavuutta. Ensimmäinen virhe kertoo huolimattomuudesta ja toinen taas konseptuaalisen tiedon puutteesta oikean ratkaisutavan löytämiseksi.


b) Suorakulmaisen särmiön muotoista vesitankkia kallistetaan kuvan mukaisesti oikealle.
Tankin mitat ovat 40 cm x 60 cm x 100 cm. Piste E on janan AB keskipiste.
Mille korkeudelle vedenpinta asettuu tankissa, jos tankki käännetään takaisin pystyyn?

$50 \cdot 40 \cdot 60 = 120\,000$

$40 \cdot 60 \cdot 100 = 240\,000$

$240\,000 - 120\,000 = 120\,000$

$100 \cdot 60 \cdot x = 120\,000$

$6000 \cdot x = 120000 \quad | : 6000$

$x = 20$

V: 20 senttimetrin korkeudelle

Kuva 123. Tehtävä 10: virhekategoria 1, esimerkkiratkaisu 2.

Virhekategoria 2: Kuvan virheellinen tulkinta

Virhekategoriaan 2 luokiteltiin ne ratkaisut, joiden vastaus oli 10 cm. Tähän kategoriaan kuuluvat virheelliset vastaukset liittyivät kuvan tai tehtävänannon lukemisen haasteisiin. Kuvien 24. ja 25. oppilasvastauksista käy hyvin ilmi se, että tehtävään vaadittava konseptuaalinen tieto oli oppilailla hallussa, mutta hankalasti hahmotettava kuva ja haastava tehtävänanto vaikeuttivat tehtävän ratkaisemista. Erityisesti kuvassa 24. näkyy hyvin oppilaan avaruudellisen hahmottamisen ja matematiikan arkielämään yhdistämisen kehittynyt osaaminen. Kuvassa 25. puolestaan näkyy tehtävän ratkaisemiseen tarvittavien proseduaalisten ja konseptuaalisten tietojen yhdistäminen ja hyödyntäminen.

b) Suorakulmaisen särmiön muotoista vesitankkia kallistetaan kuvan mukaisesti oikealle. Tankin mitat ovat 40 cm x 60 cm x 100 cm. Piste E on janan AB keskipiste. Mille korkeudelle vedenpinta asettuu tankissa, jos tankki käännetään takaisin pystyyn?

$A_1 = Ap \cdot h$

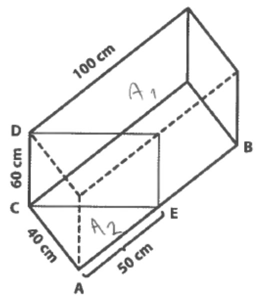
$A_1 = 100cm \cdot 60cm \cdot 40cm$

$A_1 = 240\ 000\ cm^3$

$A_2 = \frac{ap \cdot h}{2}$

$A_2 = \frac{50cm \cdot 60cm \cdot 40cm}{2}$

$A_2 = 60\ 000\ cm^3$



$ap \cdot x = 60\ 000\ cm^3$

$60cm \cdot 100cm \cdot h = 60\ 000\ cm^3$

$6000\ cm^2 \cdot h = 60\ 000 cm^3 \mid : 6000 cm^2$

$h = \frac{60\ 000 cm^3}{6\ 000 cm^2}$

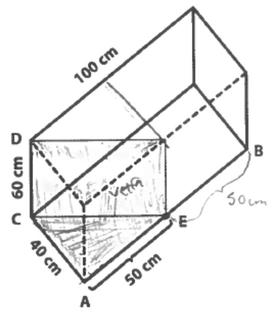
$h = 10\ cm$

V: 10 cm korkeudelle

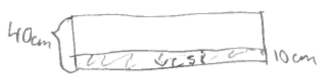
3 p.

Kuva 134. Tehtävä 10: virhekategoria 2, esimerkkiratkaisu 1.

b) Suorakulmaisen särmiön muotoista vesitankkia kallistetaan kuvan mukaisesti oikealle. Tankin mitat ovat 40 cm x 60 cm x 100 cm. Piste E on janan AB keskipiste. Mille korkeudelle vedenpinta asettuu tankissa, jos tankki käännetään takaisin pystyyn?



10cm korkeudelle, koska $\frac{1}{4}$ on vettä jaettaessa vesi tasaisesti 40cm korkuiseen tankkiin korkeudeksi tulee 10 cm

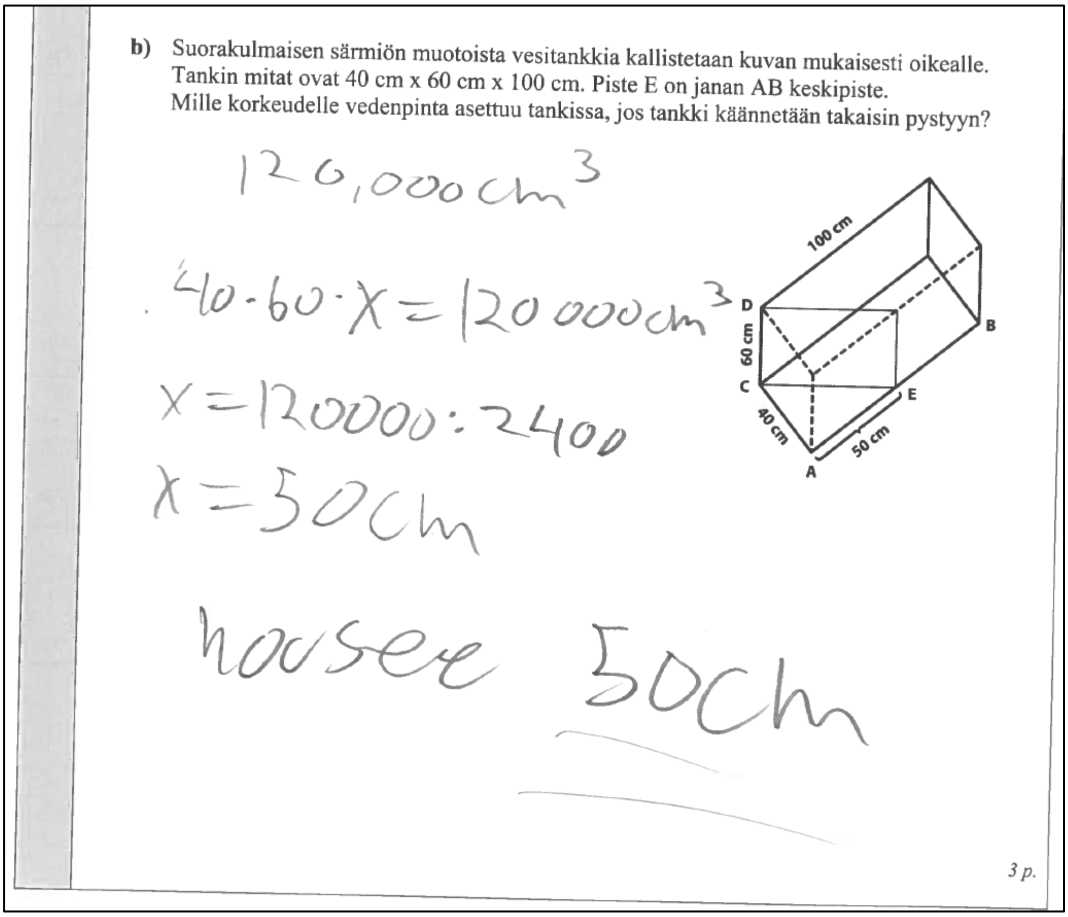


0 *3 p.*

Kuva 145. Tehtävä 10: virhekategoria 2, esimerkkiratkaisu 2.

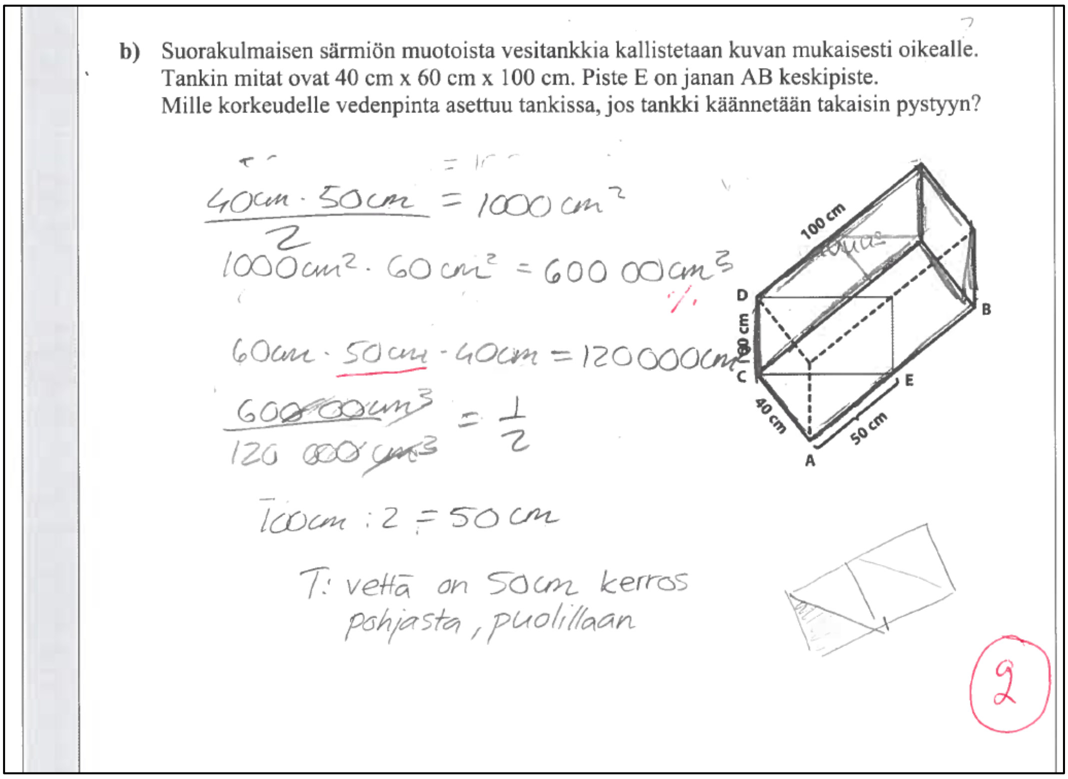
Virhekategoria 3: Vesipatsaan tilavuus puolet tankin tilavuudesta

Virhekategorian 3 muodostivat ne ratkaisut, joiden vastauksena oli 50 cm. Tämä virheellinen ratkaisu voidaan saada usealla eri tavalla ja tässä esitellään niistä kaksi eri tapaa. Kuvassa 26. nähdään ensimmäinen virheellinen tapa. Tässä tavassa kuva ja tehtävänanto on luettu oikein, mutta vesipatsaan tilavuus on laskettu väärin. Koska vesipatsaan tilavuus on kaksinkertainen todellisuuteen verrattuna, on myös lopullinen vastaus virheellinen. Tässä tapauksessa vesipatsaan tilavuus on laskettu käyttämällä suorakulmaisen särmiön tilavuuden laskemiseen tarvittavaa kaavaa, eikä oppilas ole ottanut huomion vesipatsaan todellista muotoa. Virhe saattaa liittyä huolimattomuuteen tai siihen, ettei oppilas ole ymmärtänyt kahden eri muotoisen kappaleen tilavuuden eroavuutta.


b) Suorakulmaisen särmiön muotoista vesitankkia kallistetaan kuvan mukaisesti oikealle. Tankin mitat ovat 40 cm x 60 cm x 100 cm. Piste E on janan AB keskipiste. Mille korkeudelle vedenpinta asettuu tankissa, jos tankki käännetään takaisin pystyyn?

Kuva 156. Tehtävä 10: virhekategoria 3, esimerkkiratkaisu 1.

Kuvassa 27. puolestaan nähdään esimerkki virheellisestä ratkaisusta, jossa oppilas on laskenut vesipatsaan tilavuuden oikein, mutta saanut kuitenkin virheellisen vastauksen. Virhe on tapahtunut ratkaisun viimeisessä vaiheessa, jossa oppilas vertaa saamaansa tulosta tehtävän kuvan tilanteeseen. Oppilaan mukaan vesipatsaan tilavuus on puolet siitä, mitä suorakulmaisen samanpohjaisen vesipatsaan tilavuus olisi. Oppilas kuitenkin vertaa saamaansa tulosta koko tankin tilavuuteen alkuperäisen ideansa vastaisesti. Tässä ratkaisussa näkyy hyvin virheen syy: huolimattomuus. Vaikka tehtävä on tehty oikein ja tehtävään vaadittavat proseduaaliset tiedot ovat hallussa, vastauksen suhteuttaminen tehtävänantoon on jäänyt tekemättä. Tämä kertoo kuitenkin myös siitä, että tilavuuden käsite ei ole ollut oppilaalle selkeä.



b) Suorakulmaisen särmiön muotoista vesitankkia kallistetaan kuvan mukaisesti oikealle. Tankin mitat ovat 40 cm x 60 cm x 100 cm. Piste E on janan AB keskipiste. Mille korkeudelle vedenpinta asettuu tankissa, jos tankki käännetään takaisin pystyyn?

$\frac{40cm \cdot 50cm}{2} = 1000\ cm^2$

$1000cm^2 \cdot 60\ cm^2 = 600\ 00cm^3$

$60cm \cdot \underline{50cm} \cdot 40cm = 120000cm^3$

$\frac{600\ 00cm^3}{120\ 000\ cm^3} = \frac{1}{2}$

$100cm : 2 = 50\ cm$

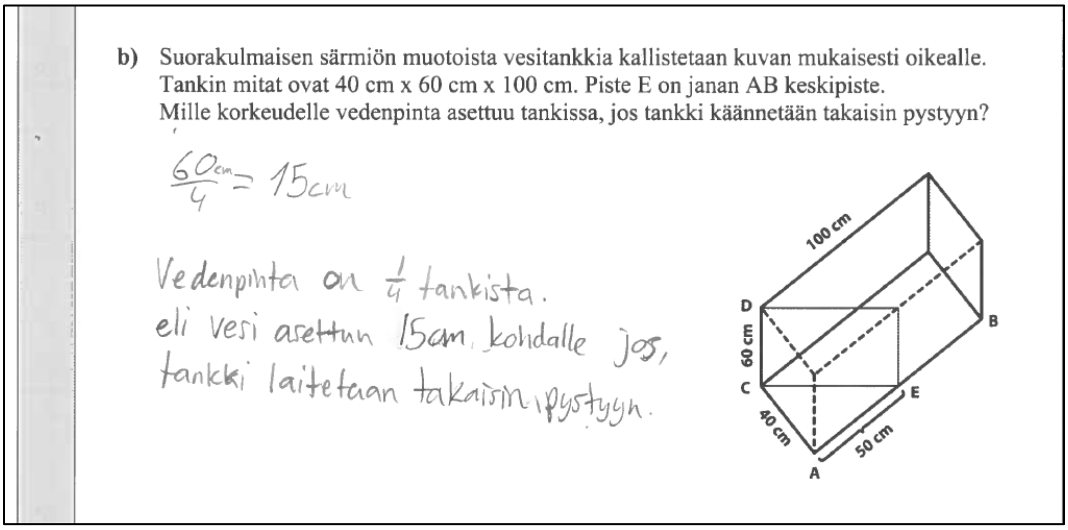
T: vettä on 50cm kerros pohjasta, puolillaan

Kuva 167. Tehtävä 10: virhekategoria 3, esimerkkiratkaisu 2.

Muut virheelliset vastaukset

Tehtävässä 10 oli suhteellisesti paljon keskeneräisiä vastauksia ja virheellisiä kategorisoimattomia vastauksia. Tämä kertoo siitä, että tehtävä on ollut perusopetuksen päättövaiheen oppilaille vaikea. Seuraavaksi esitellään joitain kategorisoimattomia virheellisiä vastauksia.

Oppilailla oli ollut vaikeuksia kuvan lukemisen suhteen, joka näkyy muun muassa kuvan 28. virheellisessä oppilasvastauksessa. Oppilas on päätellyt kuvan tilanteen oikein ja osannut päätellä, kuinka suuri osa tankin tilavuudesta on vettä. Hankaluus on kuitenkin muodostunut tiedon soveltamisesta kuvan tilanteeseen.



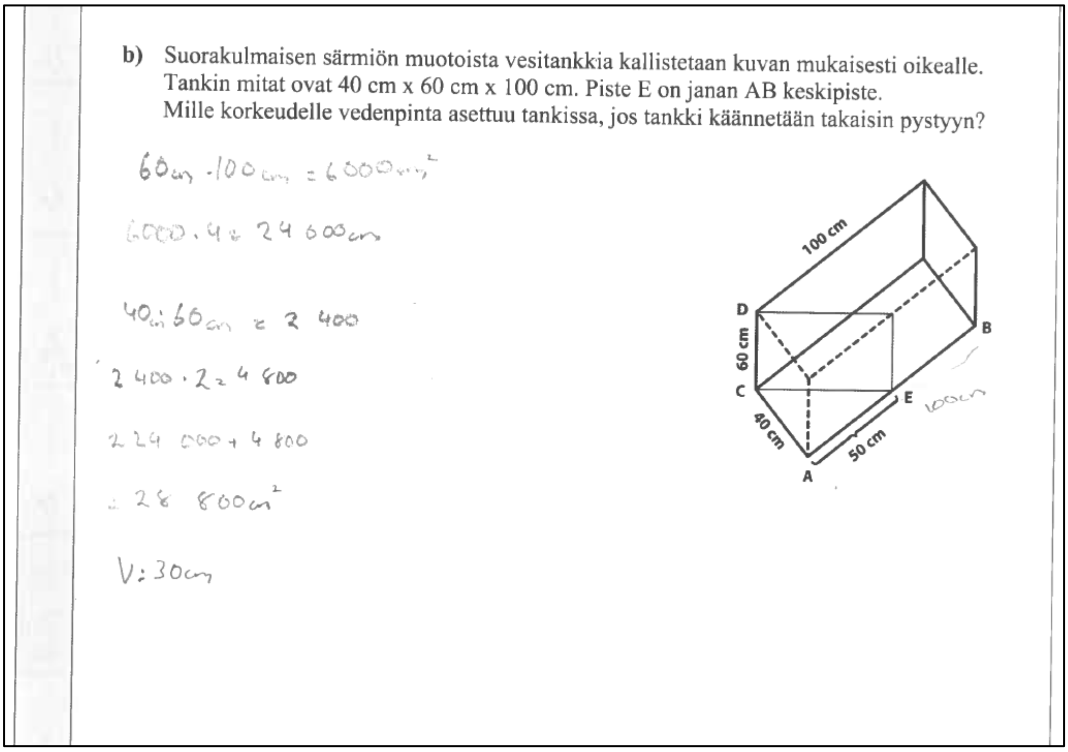
b) Suorakulmaisen särmiön muotoista vesitankkia kallistetaan kuvan mukaisesti oikealle. Tankin mitat ovat 40 cm x 60 cm x 100 cm. Piste E on janan AB keskipiste. Mille korkeudelle vedenpinta asettuu tankissa, jos tankki käännetään takaisin pystyyn?

$\frac{60cm}{4} = 15cm$

Vedenpinta on $\frac{1}{4}$ tankista.
eli vesi asettuu 15cm kohdalle jos, tankki laitetaan takaisin pystyyn.

Kuva 178. Tehtävä 10: muu virheellinen vastaus, esimerkkiratkaisu 1.

Kuvassa 29. puolestaan näkyy selkeä konseptuaalisen tiedon virheellisyys. Oppilas käyttää ratkaisussaan virheellisiä yksiköitä ja ratkaisu näyttääkin hahmotelmalta. Ratkaisussa näkyy kuitenkin hyvin se, että oppilas on osannut arvioida vastauksen suuruusluokan, mutta saamansa vastaus ei kuitenkaan ole ollut oikea. Tämä kertoo siitä, että oppilaalla on haasteita tehtävään vaadittavan proseduaalisen tiedon käytössä.



b) Suorakulmaisen särmiön muotoista vesitankkia kallistetaan kuvan mukaisesti oikealle. Tankin mitat ovat 40 cm x 60 cm x 100 cm. Piste E on janan AB keskipiste. Mille korkeudelle vedenpinta asettuu tankissa, jos tankki käännetään takaisin pystyyn?

60cm · 100cm = 6000cm²

6000 · 4 = 24 000cm

40cm · 60cm = 2 400

2 400 · 2 = 4 800

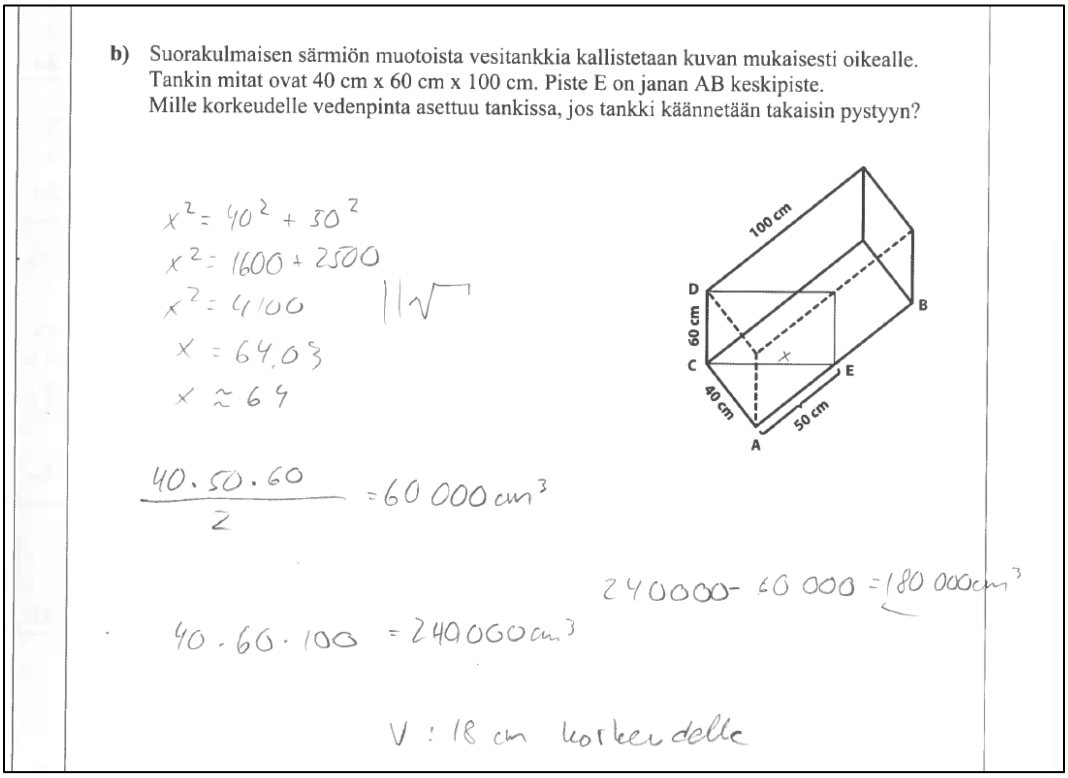
24 000 + 4 800

= 28 800cm²

V: 30cm

Kuva 29. Tehtävä 10: muu virheellinen vastaus, esimerkkiratkaisu 2.

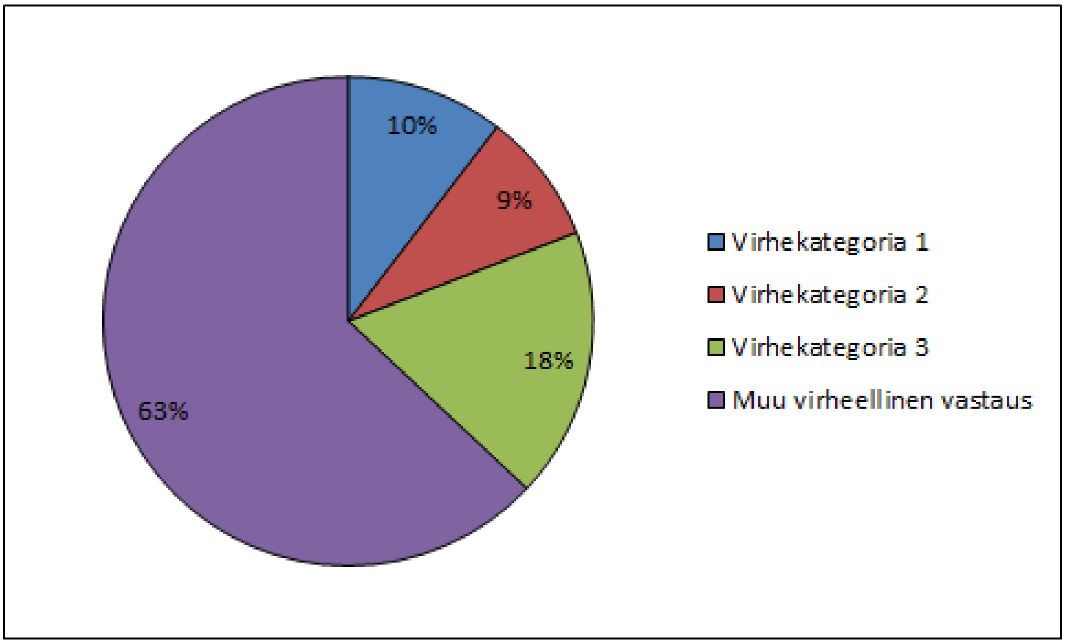
Kuvan 30. oppilasvastauksesta voidaan havaita kaksi erilaista ratkaisua: toinen pohjautuu Pythagoraan lauseen käyttöön ja toinen tilavuuksien käyttöön. Oppilas on aloittanut tehtävän ratkaisemalla Pythagoraan lauseen avulla kolmion sivun pituuden, mutta tulosta ei ole käytetty lainkaan. Oppilas on myös laskenut sekä tankin että vesipatsaan tilavuuden oikein, mutta näiden tilavuuksien suhdetta toisiinsa oppilas ei ole osannut selvittää. Toisaalta ratkaisussa käy hyvin ilmi se, että oppilas on osannut päätellä vesipatsaan korkeuden suuruusluokan tehtävän lopputilanteessa ja tämän tiedon avulla oppilas on päätellyt saamiensa tulosten perusteella vastauksen. Lisäksi tilavuuden ja pituuden yksiköiden käyttö on virheellistä. Tämä kertoo siitä, että oppilaan proseduaalinen tieto on riittävä tehtävän ratkaisemiseen, mutta konseptuaalinen tieto ei riitä tehtävän loppuun saattamiseksi.



Kuva 30. Tehtävä 10: muu virheellinen vastaus, esimerkkiratkaisu 3.

Virheellisten vastausten jakautuminen

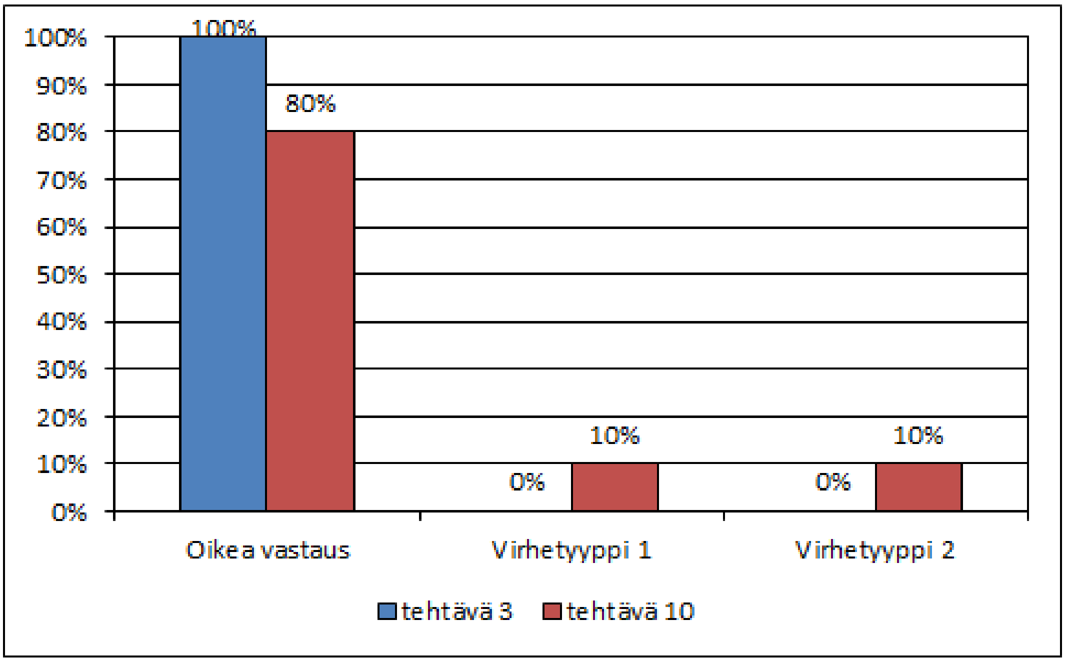
Tehtävän 10 virheellisistä vastauksista kymmenesosa kuului virhekategoriaan 1 ja yhdeksän prosenttia virheellisistä vastauksista puolestaan kuului virhekategoriaan 2 (Kuva 31.). Virhekategoriaan 3 kuului 18 prosenttia virheellisistä vastauksista. Tehtävän 10 virheellisistä vastauksista 63 prosenttia ei kuulunut mihinkään valmiiseen kategoriaan.



Kuva 31. Tehtävän 10 virheellisten ratkaisujen osuudet (%).

5.4 Opiskelijoiden vastaukset avaruusgeometrian tehtävissä

Opiskelijat ratkaisivat vain avaruusgeometriaan liittyvät tehtävät eli tehtävät 3 ja 10. Kaikki opiskelijat olivat osanneet tehtävän 3 eikä puuttuvia vastauksia ollut. Tehtävän 10 oli ratkaissut oikein 80 % (n=16) opiskelijoista. Puuttuvia vastauksia ei ollut. Virheellisistä vastauksista kaksi luokiteltiin kuuluvaksi virhekategoriaan 1 ja kaksi muuta virheellistä vastauksista puolestaan luokiteltiin kuuluvaksi virhekategoriaan 2. Opiskelijoiden vastausten jakauma esitetään kuvassa 32.



Kuva 18. Opiskelijoiden ratkaisujen jakautuminen tehtävissä 3 ja 10 (%).

5.5 Osaamisen yhteys tehtävien välillä

Oppilaiden osaamisen riippuvuutta tehtävien kesken tutkittiin käyttämällä hyväksi ristiintaulukointia. Seuraavaksi käydään läpi tulokset tehtävän 3 osalta.

5.5.1 Tehtävän 3 osaamisen yhteys tehtävien 6 ja 8 osaamiseen

Tehtävä 3 oli osattu hyvin vastaajien keskuudessa, mutta tehtävä 6 oli ollut haastavampi: 65% vastaajista oli osannut tehtävän 3, mutta tehtävän 6 vastaus oli ollut virheellinen tai puuttuva. Toisaalta taas 83% tehtävän 3 oikein ratkaisseista osasi ratkaista myös tehtävän 6 oikein. Lisäksi tehtävän 3 virheellisesti ratkaisseista 17% oli osannut ratkaista tehtävän 6 oikein. Voidaan siis päätellä, että mikäli oppilas oli osannut ratkaista tehtävän 6, oli hän osannut ratkaista myös tehtävän 3. Khiin neliö-testin mukaan tehtävän 6 ja tehtävän 3 osaamisen välillä on merkitsevä riippuvuus *(*χ^2 (4) = 28,905; p < 0,001).

Taulukko 1. Tehtävien 3 ja 6 osaamisen välinen riippuvuus.

		Tehtävä 6			
		Puuttuva vastaus	Oikea vastaus	Virheellinen tai keskeneräinen vastaus	Yhteensä
Tehtävä 3	Puuttuva vastaus	7%	0%	1%	2%
	Oikea vastaus	55%	83%	65%	66%
	Virheellinen tai keskeneräinen vastaus	38%	17%	34%	33%
	Yhteensä	100%	100%	100%	

Seuraavaksi käsitellään tehtävän 3 ja tehtävän 8 osaamisen yhteyttä. Vastaajista 80% oli osannut sekä tehtävän 3 että tehtävän 8. Hieman yli puolet vastaajista ei puolestaan ollut ratkaisut oikein tehtävää 8, mutta oli ratkaissut oikein tehtävän 3. Puolestaan 45% tehtävän 8 virheellisesti ratkaisseista oli ratkaissut virheellisesti myös tehtävän 3. Lisäksi hieman yli puolet tehtävän 8 ratkaisematta jättäneistä oli osannut tehtävän 3. Tästä voidaan päätellä, että jos oppilas oli osannut ratkaista tehtävän 8, oli hän osannut ratkaista myös tehtävän 3. Khiin neliö-testin mukaan tehtävän 8 ja tehtävän 3 osaamisen välillä on merkitsevä riippuvuus *(*χ^2 (6) = 62,779; p < 0,001).

Taulukko 2. Tehtävien 3 ja 8 osaamisen välinen riippuvuus.

		Tehtävä 8			
		Puuttuva vastaus	Oikea vastaus	Virheellinen tai keskeneräinen vastaus	Yhteensä
Tehtävä 3	Puuttuva vastaus	5%	1%	0%	2%
	Oikea vastaus	52%	80%	55%	66%
	Virheellinen tai keskeneräinen vastaus	43%	19%	45%	33%
	Yhteensä	100%	100%	100%	

Ristiintaulukointien perusteella voidaan todeta, että kontrollitehtävien osaaminen ennusti myös tehtävän 3 osaamista. Tätä voi selittää se, että tehtävä 3 oli koepaperin alussa, jolloin oppilaalla on ollut runsaasti aikaa pohtia tehtävää ja kokeilla erilaisia ratkaisuvaihtoehtoja. Toisaalta tehtävä 3 oli osattu kokonaisuudessa hyvin, ja tehtävä 3 on ollut tuttu aiemmista arvioinneista. Lisäksi tehtävässä 3 vaadittu proseduaalinen tieto on melko yksinkertaista, joten on selvää, että haastavampaa proseduaalista tietoa vaativien tehtävien osaaminen ennustaa myös heikompaa proseduaalista tietoa vaativien tehtävien osaamista.

5.5.2 Tehtävän 10 osaamisen yhteys tehtävien 6 ja 8 osaamiseen

Tehtävän 10 ratkaiseminen oli tuottanut haasteita ja sen olikin ratkaissut oikein vain kolmasosa vastaajista. Vastaajista 66 % oli osannut tehtävän 6 ja tehtävän 10. Tehtävän 6 virheellisesti ratkaisseiden osuus oli jakautunut melko tasaisesti tehtävän 10 puuttuvien, virheellisten ja oikeiden vastausten kesken. Tästä voidaan päätellä, että mikäli oppilas oli osannut tehtävän 6, oli hän todennäköisesti osannut myös tehtävän 10. Toisaalta tehtävän 6 virheellinen ratkaisu ei anna tietoa tehtävän 10 osaamisesta. Khiin neliö -testin mukaan tehtävän 6 ja tehtävän 10 osaamisen välillä on merkitsevä riippuvuus *(*χ^2 (4) = 67,921; p < 0,001).

Taulukko 3. Tehtävien 10 ja 6 osaamisen välinen riippuvuus.

		Tehtävä 6			
		Puuttuva vastaus	Oikea vastaus	Virheellinen tai keskeneräinen vastaus	Yhteensä
Tehtävä 10	Puuttuva vastaus	66%	10%	36%	37%
	Oikea vastaus	22%	66%	32%	35%
	Virheellinen tai keskeneräinen vastaus	12%	24%	31%	28%
	Yhteensä	100%	100%	100%	100%

Tehtävän 8 ja tehtävän 10 osaaminen oli jakautunut melko tasaisesti. Toisaalta yli 70% tehtävän 8 tekemättä jättäneistä ei ollut tehnyt myöskään tehtävää 10. Tämän voidaan selittää muun muassa ajan loppumisella: jos oppilas ei ole ehtinyt tehdä tehtävää 8, ei hän ole luultavasti ehtinyt tehdä tehtävävihon jälkimmäisiäkään tehtäviä. Toisaalta 15% tehtävän 8 tekemättä jättäneistä oli osannut ratkaista tehtävän 10 oikein. Puolestaan hieman alle puolet tehtävän 8 osanneista oli ratkaissut myös tehtävän 10 oikein. Tehtävän 8 virheellisesti ratkaisseiden osuus oli jakautunut melko tasaisesti tehtävän 10 puuttuvien, virheellisten ja oikeiden vastausten kesken. Khiin neliö -testin mukaan tehtävän 8 ja tehtävän 10 osaamisen välillä on merkitsevä riippuvuus (χ^2 (6) = 122,802; p < 0,001).

Taulukko 4. Tehtävien 10 ja 8 osaamisen välinen riippuvuus.

		Tehtävä 8			
		Puuttuva vastaus	Oikea vastaus	Virheellinen tai keskeneräinen vastaus	Yhteensä
Tehtävä 10	Puuttuva vastaus	73%	24%	33%	37%
	Oikea vastaus	15%	48%	28%	35%
	Virheellinen tai keskeneräinen vastaus	11%	28%	39%	28%
	Yhteensä	100%	100%	100%	

Tehtävä 10 oli osattu kokonaisuudessaan heikommin, mutta kuten aiemmin todettiin, tehtävään 6 oikein vastannut oli osannut myös tehtävään 10. Samanlaista riippuvuutta ei voitu osoittaa tehtävien 8 ja 10 välillä. Tästä voidaan päätellä, että haastavan laskutoimituksiin liittyvän tehtävän osaaminen ennustaa myös osaamista haastavassa avaruusgeometrian tehtävässä.

5.5.3 Tehtävien 3 ja 10 osaamisen yhteys ja yhteenvetoa

Tutkittavien avaruusgeometrian tehtävien osaaminen vaihteli: tehtävän 3 oli ratkaissut oikein 66 prosenttia ja tehtävän 10 oli saanut ratkaistua oikein 35 prosenttia vastanneista. Tehtävän 10 oikein ratkaisseista kolme neljäsosaa oli ratkaissut myös tehtävän 3 oikein, ja tehtävän 10 virheellisesti ratkaisseista kaksi kolmasosaa oli ratkaissut tehtävän 3 oikein. Lisäksi 35% vastaajista oli ratkaissut sekä tehtävän 3 että tehtävän 10 virheellisesti. Tästä voidaan päätellä, että mikäli oppilas oli osannut ratkaista tehtävän 10, oli hän osannut ratkaista myös tehtävän 3. Khiin neliö -testin mukaan tehtävän 10 ja tehtävän 3 osaamisen välillä on merkitsevä riippuvuus (χ^2 (4) = 28,224; p < 0,001). Tehtävän 10 osaamattomuudella ei puolestaan ollut yhteyttä tehtävän 3 osaamiseen.

Taulukko 5. Tehtävien 3 ja 10 osaamisen välinen riippuvuus.

		Tehtävä 10			
		Puuttuva vastaus	Oikea vastaus	Virheellinen tai keskeneräinen vastaus	Yhteensä
Tehtävä 3	Puuttuva vastaus	4%	1%	0%	2%
	Oikea vastaus	57%	76%	65%	66%
	Virheellinen tai keskeneräinen vastaus	40%	23%	35%	33%
	Yhteensä	100%	100%	100%	

Lukuihin ja laskutoimituksiin liittyvä osaaminen ja helppojen avaruusgeometrian tehtävien osaaminen riippuvat toisistaan. Samanlaista riippuvuutta ei voida kuitenkaan osoittaa lukujen ja laskutoimitusten osaamiseen ja haastavien avaruusgeometrian tehtävien välillä. Lisäksi haastavien avaruusgeometrian tehtävien osaaminen ennustaa myös helpompien avaruusgeometrian tehtävien osaamista, mutta samaa ei voida sanoa tehtävissä esiintyvien virheiden riippuvuudesta.

5.6 Opiskelijoiden käsitys oppilaiden virheellisistä ratkaisutavoista

Tässä luvussa tarkastellaan opiskelijoiden ryhmävastauksia koskien oppilaiden mahdollisesti tekemiä virheitä avaruusgeometrian tehtävien ratkaisuissa.

5.6.1 Opiskelijoiden pohdintaa tehtävästä 3

Opiskelijoiden vastauksissa ei ollut virheellisiä vastauksia tehtävässä 3. Oppilaiden yleisen tekemä virhe oli kertoa tahkojen määrä särmän pituudella. Tämä ratkaisuehdotus löytyi myös opiskelijoiden ryhmäpohdinnoista:

> *"Lasketaan tahkojen lukumäärä kerrotaan 10 cm".*
>
> *"6 tahkoa -> menee jokaisen yli (kerran) -> 60 cm".*
>
> *"6 ·10= 60 cm — 6-tahkoa, noppaan verrattuna.".*

Virhekategoria 2:een luokiteltavia virheitä oli oppilaiden virheellisistä vastauksista 10%. Näissä virheellisissä vastauksissa oli laskettu särmiön tilavuus. Myös tämän virheen esiintymistä opiskelijat osasivat odottaa, mikä käykin ilmi eräästä ryhmävastauksesta:

> *"Lasketaan suoraan "tilavuus" lukematta tehtävänantoa 10x10x10"*

Osassa oppilaiden virheellisistä vastauksista oli laskettu yhden tahkon pinta-ala, nämä vastaukset luokiteltiin tässä tutkimuksessa virhekategoria 3:een. Tämän kategorian virheestä ei ollut opiskelijoiden ryhmävastauksissa mainintaa.

Opiskelijoiden ryhmävastastauksissa käy ilmi huoli siitä, että oppilaat eivät ymmärtäisi tehtävänannossa käytettyjä käsitteitä ja siksi tehtävä jäisi ratkaisematta tai ratkaistaisiin virheellisesti: "*käsitteet (Mikä särmä on?)*". Oppilaiden ratkaisuissa ei kuitenkaan tullut esiin ongelmia käsitteiden ymmärtämisen kanssa. Toisin sanoen oppilaat olivat ymmärtäneet hyvin, mitä tehtävässä tulee tehdä, mutta ratkaisutavan valitseminen oli tuottanut hankaluuksia.

Opiskelijat kiinnittävät laajasti huomiota kuvan tulkitsemisen hankaluuteen. He arvioivat, että oppilaille tuottaisi haasteita huomata kuvasta puuttuvat tiedot ja ymmärtää kuvassa näkymätön symmetria:

> *"4·10=40 cm — Ei huomio niitä osia, jotka ei näy".*
>
> *"Huomaa, että päällä on 2 narua, mutta unohtaa että pohjassakin on 2·10+5·10=70".*
>
> *"pohjassa menee kaksi narua (Narujen kulku tahkoissa, jotka eivät näy)".*
>
> *"Laskee vain näkyvät narut".*

Oppilaat olivat tehneet ratkaisuissa virheitä, jotka voidaan tulkita huolimattoman kuvan lukemiseksi (ks. luku 5.2.2), minkä opettajaopiskelijat osasivat arvioida hyvin.

Opettajaopiskelijat osaavat siis arvioida hyvin kuvan lukemiseen ja tehtävän huolimattomaan lukemiseen liittyvät oppilaiden tekemät virheelliset ratkaisut. Toisaalta opiskelijat uskoivat oppilaiden kamppailevan tehtävänannon käsitteiden kanssa, mikä ei oppilasvastauksissa näyttänyt pitävän paikkansa. Lisäksi opettajaopiskelijat eivät osanneet ottaa huomioon sitä, että oppilaat saattaisivat laskea kuvasta pinta-alaa. Opettajaopiskelijat pystyivät siis päättelemään erilaisia virheellisiä ratkaisutapoja, jotka liittyivät kappaleen muotoon ja tilanteesta muodostettuun kuvaan, mutta tilanteeseen liittymättömien käsitteiden esiintymistä oppilasvastauksissa he eivät osanneet ennakoida.

5.6.2 Opiskelijoiden pohdintaa tehtävästä 10

Tehtävä 10 ratkaisut tuottivat virheellisiä vastauksia myös opettajaopiskelijoiden joukossa. Virhekategoriaan 1 luokiteltavia virheitä ilmeni opettajaopiskelijoiden vastauksissa kaksi kappaletta. Opettajaopiskelijoiden ryhmävastauksissa ei käy ilmi mahdollisten proseduaalisten virheiden mahdollisuutta, mikä voi johtua myös tehtävänannosta.

Opettajaopiskelijoiden yksilövastauksista kaksi ratkaisua voitiin luokitella kuuluvaksi virhekategoriaan 2. Oppilasvastuksista puolestaan 9 prosenttia virheellisistä vastauksista luokiteltiin tähän kategoriaan. Virhekategoriaan 2 luokitellut vastaukset johtuivat tehtävänannon kuvan hahmottamisen vaikeudesta. Tätä havaintoa tukevat myös opettajaopiskelijoiden virheelliset vastaukset. Opiskelijoiden ryhmävastauksista käy hyvin ilmi kuvan lukemiseen liittyvät haasteet:

> *”Ei huomaa, mihin suuntaan kallistetaan.”*
>
> *”Mikä on pystyssä?”*
>
> *”Loppuasennon väärinymmärtäminen (onko särmiö vaaka- vai pystyasennossa.”*

Oppilaiden virheellisissä vastauksissa kävi ilmi myös muita kuvan hahmottamiseen liittyviä ongelmia, joka näkyykin virhekategorian 3 melko suurena osuutena (18%). Tähän seikkaan olivat opettajaopiskelijat osanneet varautua:

”Tilavuuden laskemisessa on totuttu siihen, että pohja on yleensä vaakatasossa.”

”Kallistushuolen olemattomuus”

Opettajaopiskelijat arvioivat myös, että oppilaiden olisi hankala lukea kuvasta vesipatsaan korkeutta:

”Veden tilavuutta laskettaessa korkeus voi olla vaikea hahmottaa kuvasta.”

”Väärien mittojen käyttäminen laskutoimituksissa”

”Mikä on veden tilavuutta laskiessa pohja ja mikä on korkeus?”

Osa oppilaista oli pyrkinyt ratkaisemaan tehtävää käyttämällä apuna Pythagoraan lausetta. Tämän virheellisen ratkaisutavan esiintymistä olivat opettajaopiskelijat osanneet odottaakin:

”Olettaa, että jana CE on uusi korkeus -> laskee Pythagoraan lauseella”

Opiskelijat arvioivat, että tilavuuden laskeminen tuottaisi yhdeksäsluokkalaisille ongelmia:

”Tilavuuden kaavan käyttämisen vaikeus.”

”Tilavuus ja pinta-ala voi mennä jotenkin sekaisin(muunnoksissa).”

Opettajaopiskelijat osasivat siis ennakoida hyvin oppilaiden tekemiä virheitä, sillä monet oppilaiden virheelliset vastaukset johtuivat kuvan tulkintaan liittyvistä haasteista. Opettajaopiskelijoiden tekemät virheet tehtävän ratkaisemisessa olivat joko kuvan lukemiseen tai huolimattomuuteen liittyviä virheitä. Tilavuuden laskemiseen liittyviä haasteita ei juurikaan ilmennyt oppilasvastauksissa toisin kuin opettajaopiskelijat arvelivat.

6 Luotettavuus

Tässä tutkimuksessa tutkija on itse luonut tutkimusasetelman, tutkimuskysymykset, analysointimallin ja analysoinut aineiston. Koska tutkimus on toteutettu yhden tutkijan työnä, on vaarana, että viitekehyksen rakentaminen ja tutkimusaineiston analysointi ovat vinoutuneet tutkijan subjektiivisuuden vuoksi. Tutkimuksen luotettavuutta lisää kuitenkin se, että tutkimuksen kohteena olevat tehtävät ovat osa suurempaa tutkimusaineistoa ja matematiikan opettamisen asiantuntijat ovat laatineet tutkittavat tehtävät. Tehtäviä on myös esitestattu 9.-luokkalaisilla ennen tehtävien lopullista muotoilua. Näin ollen on pyritty varmistamaan se, että tehtävien vaikeustaso on sopiva ja että tehtävät mittaavat matematiikan osaamista. Toisaalta matematiikan oppimistulosten arviointiin vuonna 2012 osallistuneet oppilaat olivat tietoisia siitä, että oppimistulosten arvioinnissa menestyminen ei välttämättä vaikuttanut heidän matematiikan päättöarvosanaansa 9.-luokalla, mikä on saattanut vaikuttaa oppilaiden haluun yrittää parhaansa tässä kokeessa.

Tutkimuksessa käytetty oppilasaineisto oli melko laaja, joka lisää osaltaan tutkimuksen luotettavuutta. Huomionarvoista on, että tutkittavia tehtäviä oli vain neljä, jonka vuoksi tuloksia ei voida riskittömästi yleistää. Tutkimuksen luotettavuus ja tulosten yleistettävyys on pyritty varmistamaan sillä, että tutkijalla ei ole ollut käytössä vastaajien henkilötietoja ja tietoja heidän matematiikan osaamistasostaan. Myös se, että tutkimusaineistossa oli sekä suomen- että ruotsinkielisiä vastauksia, lisää tutkimustuloksen yleistettävyyttä.

Opettajaopiskelija-aineisto koostui 20 opiskelijan vastauksista, joten tästä tutkimuksesta nousseita tuloksia ei voida yleistää kattamaan kaikkia opettajaopiskelijoita. Opettajaopiskelijoiden tehtävien ratkaisut olivat huolellisesti kirjoitettuja, joten voidaan olettaa, että opiskelijoiden motivaatio on ollut hyvä tutkimuksen toteuttamisen suhteen, mikä puolestaan lisää tutkimuksen luotettavuutta. Lisäksi opiskelijoiden henkilötietoja ei kerätty tutkimuksen kuluessa, joten opiskelijavastaukset olivat anonyymeja.

Sekä oppilas- että opiskelija-aineistoa on tarkasteltu useaan kertaan ja tarkastelukertojen myötä tehtävien luokittelua on muokattu. On kuitenkin mahdollista, että luokkien muodostuminen on ohjannut myös tutkijaa vastausten analysoinnissa. Tätä on kuitenkin pyritty välttämään sillä, että analysointikertojen välillä on kulunut aikaa.

Luotettavuuden lisäämiseksi tutkimuksessa käytetyt määrälliset ja laadulliset menetelmät on kuvattu tarkasti. Lisäksi käytetty aineisto ja koko tutkimuksen kulku on kuvattu tarkasti, ja näiden pohjalta lukija voi itse muodostaa kuvan tutkimuksen luotettavuudesta.

Erityisesti oppilasaineistosta nousevia tuloksia tulee kuitenkin peilata tutkimuksen aikana käytössä olleeseen perusopetuksen opetussuunnitelman perusteisiin. Tutkimuksen teon jälkeen käyttöön on otettu uusi perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet, jonka perusteella matematiikan oppimistuloksia peruskoulun päättövaiheessa tullaan kartoittamaan kansallisesti vuonna 2020 (Kansallinen koulutuksen arviointisuunnitelma vuosille 2016–2019).

7 Pohdintaa ja johtopäätöksiä

7.1 Avaruusgeometrian tehtävien osaamisen riippuvuus

Tässä tutkimuksessa selvitettiin sitä, onko avaruusgeometrian tehtävien osaamisella riippuvuus. Tätä riippuvuutta tutkittiin tässä tutkimuksessa kahden tehtävän avulla. Tehtävä 3 oli tutkittaville aikaisemmilta tutkimuskerroilta tuttu, joka saattoi vaikuttaa myös tehtävän melko korkeaan osaamisprosenttiin. Tehtävä 10 puolestaan oli ensimmäistä kertaa tutkittavana. Tehtävän 3 oikein saamiseksi vaadittiin sekä hyvää avaruudellista hahmottamiskykyä että loogista päättelykykyä. Tehtävän 10 oikean ratkaisun muodostamiseksi oppilaalla tuli olla hyvä käsitteellinen tieto erilaisista kappaleista ja niiden tilavuuksien laskemisesta sekä hyvä avaruudellinen hahmottamiskyky.

Tutkittavana olleiden avaruusgeometrian tehtävien osaamisen välillä havaittiin riippuvuus. Tehtävä 3 luokiteltiin Krathwohl-Andersonin taksonomian mukaan sekä menetelmä- että käsitetiedoltaan alemmille tasoille. Onkin selvää, että korkeampaa kognitiivista prosessia vaativan tehtävän oikein saaminen ennakoi myös matalampaa tasoa vaativien tehtävien osaamista. Tehtävät 3 ja 10 mittasivat samojen käsitteiden hallintaa, sillä kummassakin tehtävässä tutkittavana oli suorakulmaiseen särmiöön liittyvä ongelma. Näin ollen tehtävien osaamisessa havaittu riippuvuus näyttää johtuvan konseptuaalisen tiedon osaamisesta. Osaamisen proseduaalisen tiedon välistä riippuvuutta ei ole mahdollista osoittaa, sillä vaadittava proseduaalinen tieto eroaa merkittävästi tehtävien välillä. Koska tehtävät mittasivat vain osaa POPS 2014-asiakirjassa määritetyistä geometrian sisällöistä, tuloksia ei voida myöskään yleistää koskemaan koko perusopetuksen geometriaa, vaan havaittu riippuvuus pätee tämän tutkimuksen mukaan ainakin kappaleisiin liittyvän konseptuaalisen tiedon alueella.

Avaruusgeometrian tehtävissä havaitut virheet olivat pääosin luonteeltaan konseptuaalisia, kuten muissakin tutkimuksissa on todettu (esim. Taipale). Erityisen kiinnostavaa oli tehtävän 3 oikeiden vastausten melko pieni prosenttiosuus. Tehtävää oli testattu jo kahdella aiemmalla kerralla, joten käsitteellisesti ja menetelmällisesti tehtävä olisi pitänyt olla tuttu. Kuitenkin tehtävän tuttuudesta huolimatta oppilaat tekivät ratkaisuissaan konseptuaalisia virheitä. Tulos herättää huolen siitä, siirtyvätkö oppilaat peruskoulun aikana van Hielen-tasoilta toiselle. Tehtävää 3 oli testattu aikaisemmilla koekerroilla, mutta oppilaista kolmasosa ei ollut saanut ratkaistua tehtävää. van Hielen-teorian perusteella nousee ajatus siitä, että osa peruskoulun päättävistä oppilaista ei saavuta van Hielen ensimmäistäkään tasoa avaruusgeometrian käsitetiedossa. Toisaalta 23% tehtävän 10 oikein ratkaisseista ei ollut saanut ratkaistua tehtävää 3 oikein. Tämä kertoo siitä, että tehtävä 10 on saattanut olla tutumpi tehtävä menetelmätiedoltaan, ja tehtävän 3 virheelliset ratkaisut kertovat myös huolimattomuudesta.

7.2 Avaruusgeometrian ja yleiseen osaamisen riippuvuus

Tässä tutkimuksessa selvitettiin sitä, onko avaruusgeometrian osaamisella ja yleisesti matematiikan osaamisella riippuvuutta. Tässä tutkimuksessa riippuvuutta tutkittiin avaruusgeometrian ja lukuihin ja laskutoimituksiin liittyvien tehtävien välillä. Tutkittavat lukuihin ja laskutoimituksiin liittyvät tehtävät olivat haastavia ja niiden oikein ratkaisseiden osuus oli melko pieni. Tulosten mukaan haastavien lukuihin ja laskutoimituksiin liittyvien tehtävien osaamisella on yhteys avaruusgeometrian osaamiseen.

Avaruusgeometrian ja lukujen ja laskutoimitusten osaamisen välistä riippuvuutta voivat selittää useat seikat. Tehtävät 6 ja 8 mittasivat erityisesti loogiseen päättelyyn ja laskemiseen prosessina liittyvää osaamista, ja kumpikin näistä osaamisalueesta tuli oppilaan osata hyvin, jotta hän pystyi ratkaisemaan avaruusgeometrian tehtävät 3 ja 10. Toisin sanoen looginen päättely ja mekaaninen laskutaito ovat välineitä avaruusgeometrian ongelmien ratkaisemiseksi, joten on selvää, että hyvä välinetaidon hallinta edistää myös avaruusgeometrian osaamista. Tällöin mekaanisen laskemiseen ei tarvitse käyttää paljoa muistikapasiteettia ja automatisoitunut mekaaninen laskutaito mahdollistaa muistikapasiteetin käyttämisen käsitetiedon prosessointiin.

Vaikka avaruusgeometrian ja yleisen osaamisen välillä on riippuvuus, ei virheellisten tai puuttuvien vastausten välistä riippuvuutta ole niin helppo osoittaa. Näin ollen tämän tutkimuksen tulosten avulla pystytään osoittamaan, että van Hielen-tasoilla 1–5 olevien oppilaiden osaamisella on riippuvuus. Voidaan olettaa, että oikein vastanneet oppilaat ovat vähintään van Hielen 1. tasolla, mutta virheellisen vastauksen saaneita ei ole yhtä helppo asettaa van Hielen tasoille. Virheelliseen vastaukseen johtaneet syyt voivat johtua sekä konseptuaalisen että proseduaalisen tiedon puutteesta. Toisaalta tässä tutkimuksessa havaittiin, että oppilaat tekivät vähän suoraan laskemiseen liittyviä virheitä, joten tämän tutkimuksen mukaan virheellisten vastausten syynä on useimmiten käsitteellisen tiedon jäsentymättömyys. Myöskään puuttuvan vastauksen jättäneitä ei voida automaattisesti asettaa millekään konseptuaalisen tiedon tasolle. Puuttuvaan vastaukseen johtuvat syyt voivat olla moninaisia, eivätkä välttämättä kerro konseptuaalisen tiedon jäsentymättömyydestä.

7.3 Opettajaopiskelijoiden ennakkokäsitykset oppilaiden tekemistä virheistä

Opettajaopiskelijoiden ennakko-oletuksia oppilaiden tekemistä virheistä tutkittiin ryhmävastausten avulla. Opettajaopiskelijoiden ennakko-oletuksen oppilaiden tekemistä virheistä painottuivat käsitteellisiin virheisiin. Tämä saattaa johtua myös tehtävänannosta, jossa pyydettiin miettimään myös virheellisen ratkaisun syntytapaa. Lisäksi opiskelijat saattavat olla käsiteorientoituneempia ja mieltävät menetelmiin liittyvät virheet toissijaisiksi virheiksi.

Opettajaopiskelijoiden ryhmävastauksista käy ilmi se, että he uskoivat oppilailla olevan heikompi käsiteellinen tieto kuin tämän tutkimuksen mukaan oli. Toisaalta opiskelijat eivät osanneet ennakoida, että oppilaat käyttäisivät ratkaisuissaan tilanteeseen sopimattomia ratkaisumalleja, kuten pituutta laskettaessa pinta-alaan liittyviä kaavoja. Toisin sanoen opettajaopiskelijat uskoivat oppilaiden osaavan käsitteellisiä hierarkioita tietämättä niiden nimiä, mutta tätä olettamusta eivät tue oppilasaineiston tulokset.

Opettajaopiskelijat toivat ryhmävastauksissaan esille eri tasoisia virheellisiä ajatusmalleja. Näin ollen voidaan päätellä, että jo opettajaopiskelijat osaavat sijoittaa oppilaita erilaisille käsiteellisen tiedon tasoille (vrt. van Hielen-teoria). Osassa ryhmävastauksista käy ilmi myös se, että opiskelijat ymmärsivät myös 0. käsitteellisen tason olemassaolon. Opettajaopiskelijat toivat vastauksissaan esille myös matematiikan oppimisvaikeuksien mahdollisuuden, ja useissa ryhmävastauksissa opiskelijat olivatkin pohtineet kuvan lukemiseen liittyviä haasteita.

Kaikki tutkimukseen osallistuneet yliopisto-opiskelijat olivat suorittaneet tai aikeissa suorittaa opettajan pätevyyteen vaadittavat pedagogiset opinnot, joten ei voida sanoa, millainen vaikutus opettajan pätevyydellä on kykyyn ennakoida oppilaan tekemiä virheitä. Huomionarvoista kuitenkin on, että jo opettajaopiskelijat osaavat ottaa huomioon lukuisia syitä, miksi virheitä voi tapahtua ja mistä ne voivat johtua. Tämä kertoo siitä, että jo opettajaopiskelijoilla on hyvä käsitys matematiikan käsitteellisen tiedon syntymisestä ja kumulatiivisuuden merkityksestä matematiikan opetuksessa. Lisäksi tutkittavat yliopisto-opiskelijat osasivat hahmottaa käsitteellisen tiedon rakentumista erilaisten tasojen avulla, joka on hyvä peruspilari matematiikan käsitteellisen tiedon opettamiselle.

7.4 Jatkotutkimusaiheita

Tutkimuksen aineistona käytettiin valmista aineistoa, joka toi tutkimukseen omat haasteensa. Käytettävissä ollut aineisto oli avaruusgeometrian tehtävien osalta melko suppea, joten samankaltaisen tutkimusasetelman luonti käyttäen useampia erityyppisiä avaruusgeometrian tehtäviä antaisi mahdollisuuden tarkastella suurempia trendejä osaamisessa. Myös sukupuolen vaikutus osaamiseen herätti kiinnostusta tutkijassa.

Oppilasaineistoa analysoidessa olisi ollut hyödyllistäkin tietää, miten oppilas oli kyseiseen ratkaisuun päätynyt. Vaikka osassa vastauksissa oppilaan ajattelua ja päättelyä oli pyritty kielentämään, monissa vastauksissa tuloksena oli pelkkä numero. Oppilaan virheellisen ajattelumallin ymmärtämiseksi ja lopulta korjaamiseksi, olisikin syytä käyttää aineistoa, joka sisältäisi pelkän ratkaisun lisäksi myös kertomuksen siitä, miten ratkaisuun on päädytty.

Avaruusgeometrian osuus perusopetuksen matematiikassa on melko vähäinen. Tämä herättääkin mielenkiinnon laajentaa tutkimusta koskemaan myös tasogeometriaa ja sen osaamista. Tällöin olisi myös mahdollista tarkastella ja verrata erilaisia virheitä geometrian eri osa-alueiden välillä. Vaikka avaruusgeometria pohjautuukin tasogeometrian käsitteisiin, ovatko oppilaiden tekemät virheet samankaltaisia?

Opettajaopiskelijoiden käsitykset oppilaiden osaamisesta ja mahdollisista sudenkuopista vastasivat melko hyvin tutkimuksessa esiin nousseita tuloksia. Tutkimusta voisi kuitenkin laajentaa koskemaan myös muita matematiikan osa-alueita. Olisikin kiinnostavaa selvittää, miten opettajaopiskelijat osaavat ennakoida esimerkiksi todennäköisyyslaskennassa tehtävät virheet.

8 Lähteet

Ahtee, M.& Pehkonen, E. (2000). Johdatus matemaattisten aineiden didaktiikkaan. Edita, Helsinki.

Fong, H. K. (1995). Schematic model for categorizing children's errors in mathematics. *Hiroshima Journal of Mathematics Educatio*n, 3, 15–30.

Haapasalo, L. (2004) Pitääkö ymmärtää voidakseen tehdä vai pitääkö tehdä voidakseen ymmärtää? Teoksessa Räsänen, P., Kupari, P., Ahonen, T., Malinen, P. Matematiikka-näkökulmia opettamiseen ja oppimiseen (2004). Niilo Mäki Instituutti, Jyväskylä.

Habila, E., Zuya, Z., Bulus, D. & Kwalat, S. (2017). Conceptual and Procedural Knowledge of Pre-service Teachers in Geometry. *International Journal of Innovative Education Research*. 5. s. 30–38.

Hirvonen, K. 2012. Onko laskutaito laskussa? Matematiikan oppimistulokset peruskoulun päättövaiheessa 2011. Koulutuksen seurantaraportit 2012:4. Helsinki: Opetushallitus.

Huhtala, S. (2000) Lähihoitajaopiskelijan oma matematiikka. Helsingin yliopiston opettajankoulutuslaitos.

Ilvesjoki, M. & Suvilehto, T. (2004) Peruslaskutoimitusten algoritmien hallinta toisen asteen ammatillisten opintojen alussa teknisillä aloilla. Jyväskylän yliopisto. Erityispedagogiikan laitos, Pro gradu -tutkielma.

Julin, S. & Rautapuro, J. (2016) Läksyt tekijäänsä neuvovat - Perusopetuksen matematiikan oppimistulosten arviointi 9. vuosiluokalla 2015. Kansallinen koulutuksen arviointikeskus. Julkaisut 20:2016.

Kansanen, P. (2004). Opetuksen käsitemaailma. PS-Kustannus, Jyväskylä.

Kansallinen arviointisuunnitelma vuosille 2016–2019. Kansallinen koulutuksen arviointikeskus, Helsinki. Saatavilla: https://karvi.fi/app/uploads/2018/01/KARVI_koulutuksen_arviointisuunnitelma_2016-2019.pdf

Koponen, M. (2017). Investigating Mathematical Knowledge for Teaching and Mathematics Teacher Education. Itä-Suomen yliopiston Fysiikan ja matematiikan laitos, väitöskirja.

Korkatti, S. (2016). Geometriaa laatoittamalla? van Hielen teorian mukainen geometrinen ajattelu ja tesselaatioon nojautuva Laatoitusprojekti peruskoulussa. Rovaniemi: Lapin yliopisto, väitöskirja.

Krathwohl, D. R. (2002). A revision of Bloom's taxonomy: an overview. *Theory Into Practice*, 41 (2002), s. 212–218.

Legutko, M. 2008. An Analysis of Students Mathematical Errors in The Teaching-Research Process. *Dalam Handbook of Mathematics Teaching: Teacher Experiment, A Tool for Research* (s. 141–152). Saatavilla: http://dandcmathematicskit.wiki.westga.edu/file/view/resource+3.pdf

Majander, H. (2010). Tietokoneavusteinen arviointi kurssilla Diskreetin matematiikan perusteet. Helsingin yliopiston matematiikan laitos, Pro gradu -tutkielma.

Metsämuuronen, J. (2007). Tutkimuksen tekemisen perusteet ihmistieteissä. Gummerus Kirjapaino Oy, Jyväskylä.

Metsämuuronen, J. (toim.) (2013d) Perusopetuksen matematiikan oppimistulosten pitkittäisarviointi vuosina 2005–2012. Koulutuksen seurantaraportit 2013:4. Opetushallitus. Tampere: Juvenes Print – Suomen Yliopistopaino Oy.

POPS (2004). Opetussuunnitelman perusteet 2004. Opetushallitus, Helsinki. Saatavilla: http://www.oph.fi/download/139848_pops_web.pdf

POPS (2014). Opetussuunnitelmanperusteet 2014. Opetushallitus, Helsinki. Saatavilla: https://www.oph.fi/download/163777_perusopetuksen_opetussuunnitelman_perusteet_2014.pdf.

Radatz, H. (1980). Students' Errors in the Mathematical Learning Process: A Survey. *For the Learning of Mathematics, 1*(1), s. 16–20. Saatavilla: http://www.jstor.org/stable/40247696

Rittle-Johnson, B. & Alibali, M. (1999). Conceptual and procedural knowledge of mathematics: Does one lead to the other?. *Journal of Educational Psychology*. 91 (1). s. 175–189.

Schnepper, L. C. & McCoy, L. P. (2013). Analysis of Misconceptions in High School Mathematics. *Networks: An Online Journal for Teacher Research, 15*(1).

Silfverberg, H. (1999). Peruskoulun yläasteenoppilaan geometrinen käsitetieto. Tampereen yliopisto. Acta Universitatis Tamperensis 710.

Taipale, A. (2010). Matematiikan, lukemisen ja kirjoittamisenvaikeuksien päällekkäistyminen nuoruusiässä. Joensuun yliopiston Kasvatustieteellinen tiedekunta, väitöskirja. Saatavilla: http://epublications.uef.fi/pub/urn_isbn_978-952-219-309-4/urn_isbn_978-952-219-309-4.pdf

Tiitu, H. (2016). Anna Karenina -periaate. Kohti matematiikan oppimisympäristössä toteutettua virheiden luokittelua. Helsingin yliopiston matematiikan laitos, Pro gradu -tutkielma. Saatavilla: https://helda.helsinki.fi/handle/10138/163211

Veloo, A., Krishnasamy, H. N. & Abdullah, W. (2015). Types of Student Errors in Mathematical Symbols, Graphs and Problem-Solving. *Asian Social Science*, 11(15), s. 324–34.

9 Liitteet

Liite 1. Saatekirje opiskelijoille.

Hyvä Yliopistomatematiikkaa aineenopettajan näkökulmasta- kurssin opiskelija,

Opiskelen Helsingin yliopistossa filosofian maisterin tutkintoa ja pääaineenani on matematikan aineenopettajan suuntautumisvaihtoehto. Olen tekemässä tutkintooni kuuluvaa pro gradu-tutkimusta, jossa tutkin peruskoulun päättövaiheessa oppilaiden tekemiä virheitä matematiikan tehtävissä. Tutkimuksessani perehdyn erityisesti virheisiin, joita oppilaat tekevät avaruusgeometrian tehtävissä.

Tutkimuksessa käyttämäni aineisto ja tutkimani tehtävät ovat osa matematiikan oppimistulosten pitkittäistutkimusta, jossa tutkittavien matematiikan osaamista on tutkittu sekä peruskoulussa että toisen asteen koulutuksen aikana. Tutkimukseeni valikoidut avaruusgeometrian tehtävät ovat olleet pitkittäistutkimuksen kohteena eri luokka-asteilla.

Yliopisto-opiskelijoilta kerättävän aineiston tarkoitus on antaa yksi näkökulma tehtävien haastavuuden pohdintaan.

Toivoisin, että voisit vastata tutkittavina oleviin tehtäviin ja samalla tukea tutkimukseni toteutumista. Tehtävien tekemiseen käytettävä aika on 15 minuuttia. Saat käyttää muistiinpanovälineitä ja laskinta tehtävien ratkaisemiseksi.

Vastauksia ei pystytä yhdistämään vastaajiin ja vastaaminen tapahtuu täysin anonyymisti.

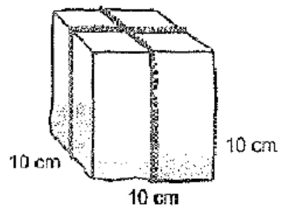
Kiitos etukäteen yhteistyöstä!

Ystävällisin terveisin
Anne Kivistö

anne.kivisto@helsinki.fi

Liite 2. Opiskelijoiden ryhmätehtävä 1.

Kuvan laatikon kaikki särmät ovat 10 cm pitkiä.
Kuinka pitkä on ympärillä oleva naru?

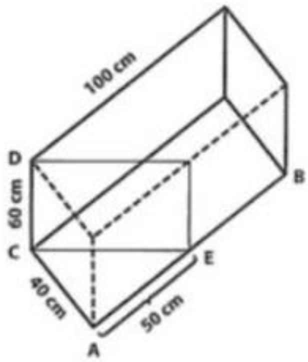


Vastaus: ______

Tehtävä: Pohtikaa pienissä ryhmissä millaisia virheitä peruskoulun päättövaiheen oppilas voisi tehdä ratkaistessaan yllä olevaa tehtävää. Pohtikaa myös mistä kyseinen virheellinen ratkaisutapa voisi johtua.

Liite 3. Opiskelijoiden ryhmätehtävä 2.

Suorakulmaisen särmiön muotoista vesitankkia kallistetaan kuvan mukaisesti oikealle. Tankin mitat ovat 40 cm x 60 cm x 100 cm. Piste E on janan AB keskipiste. Mille korkeudelle vedenpinta asettuu tankissa, jos tankki käännetään takaisin pystyyn?



Tehtävä: Pohtikaa pienissä ryhmissä millaisia virheitä peruskoulun päättövaiheen oppilas voisi tehdä ratkaistessaan yllä olevaa tehtävää. Pohtikaa myös mistä kyseinen virheellinen ratkaisutapa voisi johtua.